
Analyse limite : approches micro-macro et décomposition

**Joseph Pastor*, Philippe Thoré*, C. Vandenbussche*,
Franck Pastor**, Etienne Loute****

* Laboratoire LOCIE, POLYTECH'Savoie, 73376 Le Bourget du Lac.
joseph.pastor@univ-savoie.fr, philippe.thore@univ-savoie.fr,
cedric.vandenbussche@gmail.com

** Facultés Universitaires Saint Louis,
43 Bd du Jardin Botanique, B1000 Bruxelles.
franck.pastor@fusl.ac.be, loute@fusl.ac.be

RÉSUMÉ. Tout d'abord nous présentons l'étude axisymétrique du critère de plasticité d'un matériau de Coulomb poreux selon le modèle de Gurson, en prolongement de précédents résultats sur ce sujet. Nous montrons entre autres que le critère de Cam Clay modifié, après translation adéquate, constitue une bonne approximation de notre critère numérique, sauf pour le point anguleux vers les compressions isotropes. La seconde partie traite de la décomposition de la méthode cinématique, en déformation plane ici. Le problème initial est décomposé à un ou plusieurs niveaux traités itérativement. Chaque itération se compose d'une première phase où l'on résout indépendamment les sous-problèmes, et d'une seconde phase où l'on fait évoluer les vitesses aux interfaces. La méthode, appliquée ici au problème du talus vertical, s'avère très performante.

ABSTRACT. First we use limit analysis under axisymmetrical conditions to analyze the yield criterion of a porous Coulomb material, on the basis of the Gurson model and related previous works. Among other results, a comparison with an ad hoc translated "modified Cam-Clay criterion" points out that it might be considered as a satisfactory approximation, except that it does not account for the corner of our criterion on the isotropic compressive axis. The second part is concerned with the decomposition of the kinematical approach, here in plane strain. The initial problem is decomposed at one level or more, and iteratively processed. Each iteration is made up of two steps. In the first step, the sub-problems are independently solved ; the second step allows to modify the interface velocities. Applied here to the vertical cut problem, this approach appears very efficient.

MOTS-CLÉS : Analyse limite, optimisation convexe, modèle de Gurson, Coulomb poreux, approche décomposition, stabilité de talus.

KEYWORDS: Limit analysis, convex programming, Gurson model, porous Coulomb, decomposition approach, slope stability.

1. Introduction

Nous proposons ici une communication en deux parties dont la première induit en fait la seconde. Que ce soit pour l'approche micro-macro (première partie, cas de Coulomb 3D) ou pour les fondations sur réseau de micropieux (objectif final de la seconde partie), la taille des problèmes devient rédhibitoire. Une décomposition en problèmes exécutables en parallèle devient donc plus que souhaitable si l'on envisage l'étude du sol – poreux ou non – du point de vue tout tridimensionnel.

La section 2 fait suite à des travaux précédents (Trillat *et al.*, 2005) au sujet du matériau dit de Gurson, ou « von Mises poreux ». S'ils ont montré le caractère erroné de cette approche dans le cas des cavités cylindriques, ils en ont en revanche confirmé la validité dans le cas des cavités sphériques, première approche des porosités réelles en géotechnique. Par suite, nous les étendons ici au cas du matériau de « Coulomb poreux » sur la base du modèle de Gurson pour les cavités sphériques.

La seconde partie présente une décomposition originale du problème d'analyse limite qui, néanmoins, ne relève pas de la décomposition de domaines. D'une part la méthode d'optimisation proposée en (Pastor *et al.*, 2005) a montré une excellente robustesse dans la résolution du problème statique. D'autre part, partant du travail pionnier de (Anderheggen *et al.*, 1972), la formulation proposée en (Pastor *et al.*, 2006) permet d'obtenir des bornes cinématiques rigoureuses en n'utilisant que le critère de plasticité du matériau. C'est sur ces deux travaux qu'est fondée la méthode de décomposition de la section 3.

2. Étude du critère de « Coulomb poreux »

2.1. Position du problème

Le modèle mécanique est une sphère creuse, à cavité sphérique centrale, qu'on appellera Volume Élémentaire (VE) dans la suite. Du fait de l'isotropie du matériau homogénéisé, ce VE est étudié sous chargement axisymétrique - sans perte de généralité - sous condition de type déformation moyenne au bord. Le maillage en éléments finis triangulaires concerne donc une couronne plane repérée en coordonnées cylindriques (R, Z) . C'est une variation quadratique des variables qui a été la plus efficace pour les deux approches statique et cinématique. Néanmoins, surtout en chargement compressif, l'addition d'un champ analytique au champ numérique a été nécessaire et une post-analyse fine a permis de restaurer le caractère admissible des solutions obtenues.

Les problèmes résultants relèvent de l'optimisation conique et de ses codes spécifiques. Néanmoins, après moult essais, nous avons finalement linéarisé les cônes liés au critère de plasticité et utilisé le code d'optimisation linéaire (XA, 2000) qui a montré la robustesse nécessaire pour ces problèmes axisymétriques et leur conditionnement toujours difficile.

2.2. L'approche statique

Le champ de contraintes dans le triangle est de type quadratique, les coefficients suivants étant les inconnues de notre problème :

$$\begin{cases} \sigma_R = A + B R + C Z + H R Z + I R^2 + J Z^2 \\ \sigma_\theta = A + B_\theta R + C Z + H_\theta R Z + I_\theta R^2 + J Z^2 \\ \sigma_Z = A_Z + B_Z R + C_Z Z + H_Z R Z + I_Z R^2 + J_Z Z^2 \\ \tau_{RZ} = B_r R + H_r R Z + I_r R^2. \end{cases} \quad [1]$$

Les champs analytiques, multipliés par une variable scalaire, sont déduits de la solution de (Chadwick, 1959) concernant le problème de la cavité soumise à une pression intérieure. En traction et compression, respectivement, nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Y(1 - [a/r]^{2\alpha/(1+\alpha)})/\alpha : \sigma_\theta = \sigma_\phi = Y(1 - [1/(1+\alpha)][a/r]^{2\alpha/(1+\alpha)})/\alpha \\ \sigma_r &= Y(1 - (r/a)^{2\alpha})/\alpha : \sigma_\theta = \sigma_\phi = Y(1 + \alpha)(1 - (r/a)^{2\alpha})/\alpha \end{aligned} \quad [2]$$

où $\alpha = 2 \sin \phi / (1 - \sin \phi)$, $Y = 2c \cos \phi / (1 - \sin \phi)$ et où a est le rayon intérieur de la cavité. L'addition de ces champs continus, après transport dans le repère cylindrique, introduit une non-linéarité supplémentaire. Les conditions aux limites sont imposées de façon à être strictement vérifiées, ainsi que les équations d'équilibre et le chargement. Le critère de Coulomb est écrit sous une forme nécessitant un seul cône, lequel est linéarisé. Ce critère est appliqué aux sommets, au milieu des côtés et au centre de gravité afin de limiter les violations du critère dues au caractère non linéaire de l'élément, violations éliminées ensuite par post-analyse.

2.3. L'approche cinématique

De manière analogue les composantes de la vitesse de déplacement dans l'élément sont prises quadratiques et plus précisément comme suit :

$$\begin{cases} u_R = R (A + B R + C Z) \\ u_\theta = 0 \\ u_Z = D + E R + F Z + H R Z + I R^2 + J Z^2 \end{cases} \quad [3]$$

Ici les champs de vitesses analytiques, adaptés de (Yu, 2000), s'écrivent :

$$u_r = \pm \frac{G}{r^{2\alpha}} \text{ avec } \alpha = \frac{1 \mp \sin \phi}{1 \pm \sin \phi} \text{ (+ en traction, - en compression).} \quad [4]$$

La condition PA est là aussi mise sous forme telle qu'elle aboutit à un ensemble de conditions linéaires et d'un cône, à raison d'un ensemble par sommet de triangle du fait de la linéarité du champ de vitesse de déformation numérique et de la convexité du domaine des vitesses admissibles. Suite à la non-linéarité induite par le champ continu, ce cône est légèrement perturbé pour que le critère soit vérifié partout lors de la post-analyse. De même, du fait de la convexité du domaine des sauts de vitesse PA ces sauts sont imposés linéaires le long de la discontinuité.

2.4 Résultats.

Les deux approches ont été appliquées au cas du matériau de « Coulomb poreux » dont l'angle de frottement interne et la porosité valent respectivement 20° et 25 %. Pour comparaison nous avons tracé (figure 1) les critères de Cam-Clay originel et modifié, eux-mêmes translatés de sorte que ce dernier s'écrive :

$$\Sigma_{eqv} = -M (\Sigma_m + p_0) \left[\ln \frac{\Sigma_m + p_0}{p_c + p_0} - 1 \right], \quad [5]$$

$$\text{où } M = \frac{6 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \text{ et } p_0 = \pm c \cot \varphi \left[1 - f^{2(1-\alpha)/3} \right].$$

En [5], p_c est l'abscisse du maximum de Σ_{eqv} ; p_0 est la valeur de la solution Σ_m obtenue avec les champs analytiques cinématiques [4], soit ici : $p_0 = -4.4338 c$ et $p_0 = 1.03213 c$ en compression et en traction isotrope, respectivement. Cette comparaison montre que le critère de Cam-Clay modifié et translaté peut être considéré comme une bonne approximation, hormis pour le point anguleux sur l'axe des contraintes moyennes analogue à celui du critère Cam-Clay originel.

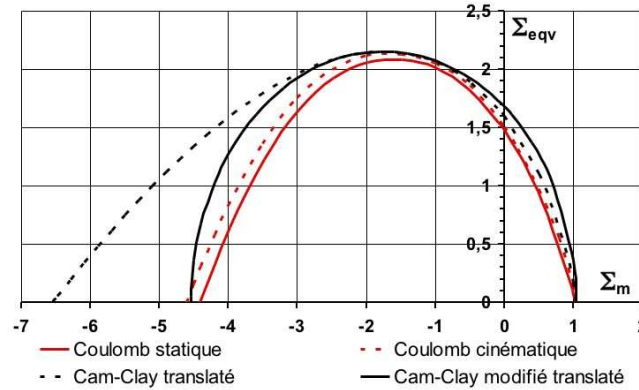


Figure 1. Critère de « Coulomb Poreux » et critères de Cam-Clay translatés.

3. Méthode cinématique et approche décomposition

Le point de départ a été le travail précurseur de (Anderheggen *et al.*, 1972). Supposons suivant (Salençon, 1974) que la puissance virtuelle des charges extérieures P_{ext} s'écrive sous la forme d'un produit scalaire d'un vecteur chargement Q et d'un vecteur vitesse généralisée $q = q(u)$. Le champ des vitesses virtuelles, continues et dérivables par morceaux pour simplifier, est pris ici linéaire dans l'élément triangulaire d'aire S_{it} , d'où une vitesse de déformation uniforme. La puissance (virtuelle) des efforts extérieurs dans le champ u devient, en notation numérique, $P_{ext} = \{u\}^T [\beta] \{Q\}$. Considérons un champ de contraintes σ constant pour chacun des éléments ; en utilisant la relation MEF classique $\{v\} = [B] \{u\}$ et le principe des puissances virtuelles (PPV) on montre alors que le problème suivant donne bien un chargement optimal Q cinématique :

$$\begin{cases} \text{Max } \{q^d\}^T \{Q\} \\ [\alpha] \{\sigma\} - [\beta] \{Q\} = 0, \\ f_{it}(\sigma) \leq 0, \end{cases} \quad [6]$$

où la matrice $[\alpha]$ résulte de l'assemblage des $[B]S_{it}$ des triangles it du maillage et les f_{it} sont les critères de plasticité convexes.

Les conditions aux limites, la condition cinématique $q = q^d$, et les relations d'association (loi de normalité) sont vérifiées à l'optimum du fait des conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker. Les vitesses de déplacement optimales sont les opposées des variables duales des contraintes d'égalité du problème. D'après le PPV, le champ de contraintes, qui est PA, sera d'autant plus près d'être statiquement admissible que la classe des champs de vitesses virtuelles sera grande (donc le maillage plus fin), et par suite la solution plus proche de la charge limite cherchée.

3.1. Approche décomposition

Cette approche est basée sur une décomposition du problème sans relever pour autant des techniques dites de « décomposition de domaines ». Nous présentons ici son principe pour des champs de vitesses continus variant linéairement dans chaque triangle. Considérons donc le problème du barreau comprimé entre plaques rugueuses dont seul le quart supérieur gauche est maillé compte tenu des symétries.

La partie gauche de la figure 2 est le problème cible, que l'on divise en un sous-problème II_g et un problème II_d . Le problème de départ, pris ici quatre fois plus petit, sert à donner une suite de valeurs initiales aux vitesses de l'interface entre sous-problèmes pour démarrer l'algorithme de décomposition. La plaque indéformable est animée d'une vitesse verticale uniforme U_0 , le paramètre de chargement associé (l'intégrale des contraintes normales sous la plaque) étant nommé F .

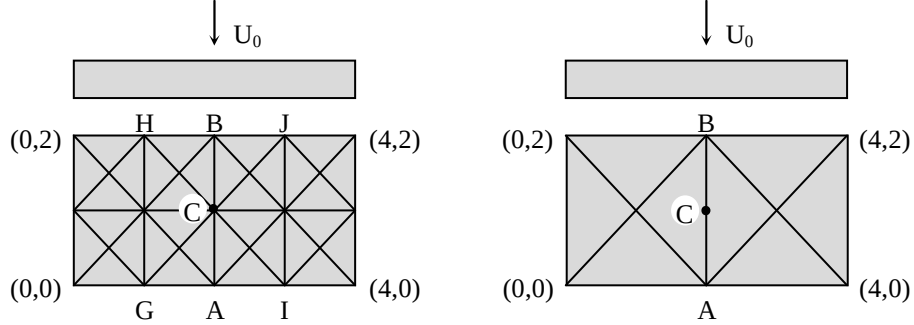


Figure 2. Les maillages cible et de départ.

La résolution du problème de départ (ici 2×1) donne les vitesses en A, B, C , respectivement u^A, u^B, u^C , qui serviront de conditions aux limites (non nulles) des problèmes II_g et II_d . A l'optimum ces vitesses seront égales aux coefficients q_i^d de la fonctionnelle : il suffit par suite de définir la puissance P_{ext} comme suit, dans le cas des problèmes II de la figure 3 :

$$P_{ext} = FU_0 + Q_1 u_x^A + Q_2 u_y^A + Q_3 u_x^C + Q_4 u_y^C + Q_5 u_x^B + Q_6 u_y^B = FU_0 + Q_i q_i. \quad [7]$$

3.1.1. Les problèmes II

La fonctionnelle des problèmes II s'écrit donc ici : $FU_0 + Q_i q_i$ (somme sur i). A l'optimum, pour chacun des deux problèmes, la valeur de la fonctionnelle donne la puissance dissipée. L'ensemble des deux champs solution est admissible pour le problème cible, les deux champs se raccordant exactement par construction. A ce stade (fin itération 1) la puissance dissipée du problème cible est égale à la somme des puissances de II_g et II_d . Elle est inférieure (au plus égale) à la puissance dissipée de départ du fait du nombre de degrés de liberté en vitesses nettement supérieur, le champ de départ étant d'ailleurs inclus ici dans ceux du problème raccordé.

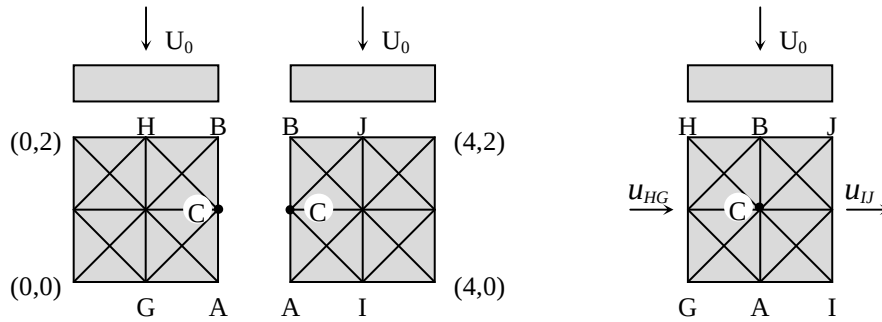


Figure 3. Les problèmes II et le problème III .

Pour une itération du processus, il faut « débloquer » les vitesses à l'interface séparative $\Pi_g - \Pi_d$. C'est le rôle de la phase *III* ci-après.

3.1.2. Le problème *III*

Il est de même nature que les précédents, les vitesses aux bords verticaux étant respectivement les valeurs optimales aux points nodaux de GH obtenues en Π_g , et de IJ venant de Π_d . La solution optimale de ce problème *III*, où la fonctionnelle comporte le paramètre de chargement F et ceux liés aux vitesses nodales en GH et IJ, permet de modifier les vitesses à l'interface ACB en diminuant la puissance dissipée dans HGIJ. On a ainsi relaxé ladite interface, et pour l'itération suivante ce problème *III* joue le rôle du problème de départ, à ceci près qu'il n'y a pas d'interpolation à faire. L'itération courante consiste donc en la résolution de *III* puis de Π_g et Π_d .

La présente méthode cinématique entraîne que seule change la fonctionnelle d'une itération à l'autre ; par suite les itérations suivant la première sont très peu coûteuses en temps de calcul du fait de l'injection de la solution précédente comme solution de départ, le maillage lui-même étant inchangé. Par ailleurs, dans le cas présent le paramètre cinématique « plaque » est le même pour tous les problèmes. Dans d'autres cas (chargement en contrainte uniforme, talus...) il faut prendre soin de répartir les paramètres cinématiques « réels » entre les différents problèmes.

3.2. Expérimentation

La méthode est appliquée ici au cas « maximal », à savoir l'approche *quadratique discontinue* du problème du talus vertical de Tresca (de hauteur H et de cohésion c), pour lequel la meilleure solution cinématique était $\gamma H / c = 3,782$ (Pastor *et al.*, 2003). Le maillage utilisé est carré et comporte $N \times N$ rectangles à 4 triangles. La figure 4 donne l'évolution de $\gamma H / c$ en fonction du nombre de rectangles. De $N = 16$ à 68, la résolution est directe ; de $N = 76$ à 120 le problème est décomposé en deux sous-problèmes ; pour $N = 144$ enfin, les deux sous-problèmes sont eux-mêmes décomposés en deux. La valeur finale, dûment post-analysée, ressort à $\gamma H / c = 3,7786$, pour un temps de 1h 20 mn environ par sous-problème.

Pour information, le problème cible 144×144 (82 944 triangles quadratiques) comporterait 1 750 000 variables, 830 000 conditions linéaires et 580 000 conditions non linéaires ! Signalons enfin que le code conique commercial ne converge plus à partir de $N = 50$ pour ce problème. A contrario l'optimiseur utilisé ici a fait preuve d'une robustesse sans faille pour tous les cas traités, avec admissibilités vérifiées à mieux que 10^{-7} , et des temps de calcul de l'ordre de ceux des codes commerciaux précédents quand ils sont utilisables.

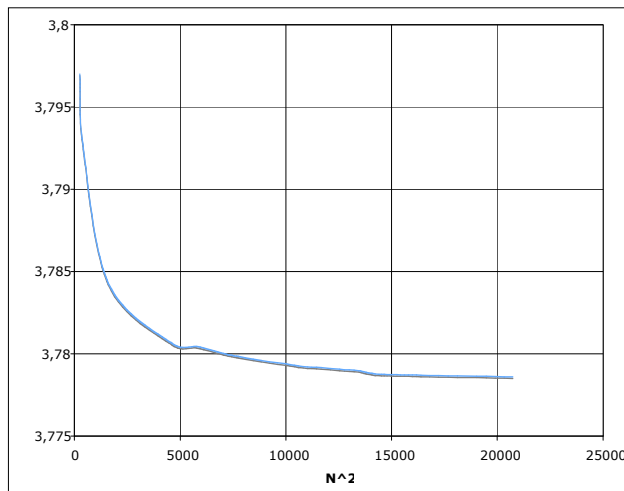


Figure 4. Talus vertical : $\gamma H / c$ en fonction de la taille du maillage.

4. Bibliographie

- Anderheggen E. and Knopf H., « Finite element limit analysis using linear programming », *Int. J. Solids Structures*, vol. 8, 1972, p. 1413-1431.
- Chadwick P., « The quasi-static expansion of a spherical cavity in metals and ideal soils », *Quarterly J. Mech. Applied Mathematics*, vol. 12, 1959, p. 52-71.
- Pastor F., Loute E., « Solving limit Analysis problems: an interior point method », *Commun. Numer. Meth. Engng (CNME)*, vol 21, 11, 2005, pp 631-642 .
- Pastor F., Trillat M., Pastor J., Loute E., « Stress-based upper-bound method and convex optimization: case of the Gurson material », *CRM, Acad. Sc. Paris*, vol. 334, 2006, p. 213-219.
- Pastor J., Thai T.H., Francescato P., « Interior point optimisation and limit analysis: an application », *Commun. Numer. Meth. Engng*, vol. 19, 2003, p. 779-785.
- Salençon J., *Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols*, Eyrolles, Paris.
- Trillat M., Pastor J., « Limit Analysis and Gurson's Model », *Eur. J. Mechanics A/ Solids*, 24 2005, pp 800-819.
- XA -V 5.0, Sunset Software Technology. 1613 Chelsea Road, Suite 153 San Marino, CA 91108, USA, 2000.
- Yu H.S., « Cavity Expansion Methods in Geomechanics », *Kluwer Academic Publishers*, The Netherlands 2000.