
Comportement courbe-R et effet d'échelle dans la rupture quasifragile. Cas des structures entaillées.

Stéphane Morel

Unité Sciences du Bois et des Biopolymères (US2B),
UMR Univ. Bordeaux 1/CNRS/INRA,
Pierroton, 69 route d'Arcachon, 33612 Cestas Cedex.
s.morel@us2b.u-bordeaux1.fr

RÉSUMÉ. Une extension de la loi d'effet de taille de Bažant est proposée dans le cas d'une courbe-R dépendante de la taille des structures. Si les comportements asymptotiques attendus aux petites et grandes tailles restent en accord avec la loi de Bažant, on constate un décalage vers la droite de l'asymptote relative à l'effet de taille de la MLER pour les spécimens de grandes tailles. Dans le cas d'un faible effet de taille sur la courbe-R, ce décalage souligne une possibilité d'optimisation conséquente de la taille des structures, le gain de charge pouvant atteindre 100% pour les structures de grandes tailles en comparaison aux prédictions de la loi proposée de Bažant.

ABSTRACT. An extension of the Bažant Size Effect Law (SEL) is proposed in the case of a size-dependent R-curve. If the asymptotic behaviours expected for small and large structure sizes are in agreement with SEL, a shift to the right of the asymptote related to the size effect expected from LEFM is observed. In the case of a slight size effect on the R-curve, this shift of the LEFM's asymptote emphasizes a possible substantial optimization of the structure size, a 100% load gain appearing possible by comparison of the SEL's predictions.

MOTS-CLÉS : Rupture quasifragile, Courbe-R, Exposants d'échelle, Effet de taille

KEYWORDS: Quasibrittle failure, R-curve, Scaling exponents, Size effect

1. Introduction

Depuis les années 80-90, la loi d'échelle faisant référence pour décrire l'effet de taille des structures entaillées constituées de matériaux quasifragiles (béton, bois) est la loi d'effet d'échelle de Bažant (Bažant *et al.*, 1990, Bažant, 1997). Cette loi d'échelle est fondée sur un comportement à rupture des matériaux quasifragiles caractérisé par une courbe de résistance (courbe-R) unique, i.e., indépendante de la taille des structures. A partir d'une analyse asymptotique des propriétés énergétiques (courbe-R), Bažant (Bažant, 1997) montre que, dans le cas de structures homothétiques entaillées de tailles caractéristiques D , la contrainte nominale σ_N (estimée à partir de la charge au pic P_u , i.e., $\sigma_N = P_u/D^2$) évolue en fonction de D comme :

$$\sigma_N = \frac{\sigma_{max}}{\sqrt{1 + \frac{D}{D_0}}}, \quad [1]$$

où $\sigma_{max} = B f_t$ [Pa] est la contrainte nominale maximale supportée par ces structures et D_0 [m] est la taille correspondant à l'intersection de deux comportements asymptotiques (Fig. 1). Dans les structures de petites tailles (i.e., $D \ll D_0$), il n'y a pas d'effet d'échelle. La *fracture process zone* (FPZ) occupe tout le volume de la structure et la rupture apparaît sans réelle propagation de fissure ; la contrainte nominale peut alors être estimée à partir d'un critère de résistance (type RDM) : $\sigma_N = \sigma_{max}$. Dans les structures de grandes tailles, l'effet d'échelle est celui attendu par la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER), i.e., $\sigma_N \sim D^{-1/2}$. Dans ce cas, la FPZ n'occupe qu'une fraction infinitésimale du volume de la structure et en conséquence les champs de contraintes et de déformations entourant la FPZ sont les champs asymptotiques attendus par la MLER.

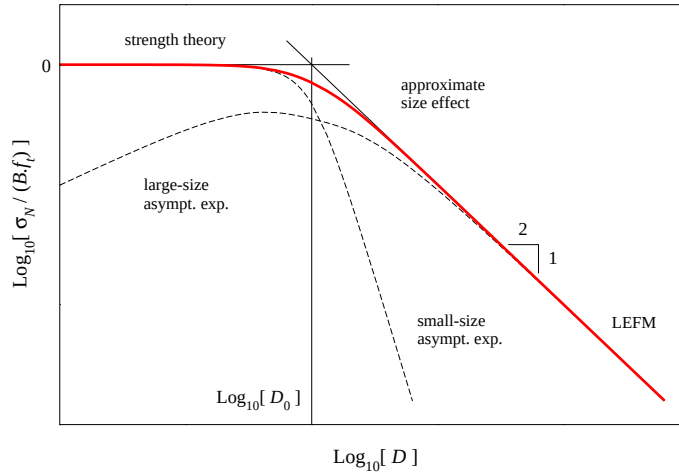


Figure 1. Loi d'effet de taille de Bažant (SEL) obtenue sur la base d'une courbe-R unique (i.e., indépendante de la taille des structures)

Néanmoins, si dans la loi de Bažant [Eq.(1)] les comportements asymptotiques aux petites et grandes tailles sont précisément définis, il n'en est pas de même pour les structures de tailles intermédiaires où l'évolution de la contrainte nominale est estimée par un raccordement approximatif entre les deux comportements asymptotiques. De plus, ce domaine de taille correspond à celui généralement exploré expérimentalement, et en conséquence, la loi de Bažant est usuellement ajustée à partir du domaine de taille où elle est le moins précisément définie. D'autre part, il a été montré récemment que la courbe-R d'un matériau quasifragile comme le bois pouvait être dépendante de la taille des structures (Morel *et al.*, 2002a). Cet effet de taille sur les propriétés énergétiques est en désaccord avec l'hypothèse émise dans la loi d'effet d'échelle de Bažant (courbe-R unique) et en conséquence il apparaît intéressant d'étudier les conséquences d'une courbe-R dépendante de la taille en terme d'effet de taille sur la contrainte nominale (Morel, 2007).

2. Courbe-R et longueur interne

Dans le cadre de la mécanique *équivalente* de la rupture le comportement quasifragile est caractérisé par une courbe de résistance ou courbe-R (Bažant *et al.*, 1990, Morel *et al.*, 2005) généralement décrite par une loi puissance qui peut prendre la forme suivante (Morel, 2007) :

$$G_R(\Delta a, D < D_{max}) = \begin{cases} G_{R0} [1 + \phi(D) \Delta a^\beta] & \text{si } \Delta a < \Delta a_c(D) \\ G_{Rc}(D) & \text{si } \Delta a \geq \Delta a_c(D), \end{cases} \quad [2]$$

où $\Delta a = a - a_0$ correspond à l'incrément de longueur de fissure (a_0 étant la longueur d'entaille initiale), G_{R0} désigne la résistance initiale (i.e., lorsque $a = a_0$), β est l'exposant caractérisant la courbure de la courbe-R ($0 < \beta < 1$) et ϕ correspond au préfacteur de la loi puissance. Notons que pour tout incrément $\Delta a \geq \Delta a_c$, où Δa_c correspond à la longueur élastique équivalente de la FPZ (longueur interne), la résistance ne suit plus la loi puissance mais reste constante et égale à G_{Rc} qui correspond à la valeur plateau de la courbe-R.

D'autre part, de manière à modéliser un effet de taille sur cette courbe-R comme il a pu être observé pour le bois (Morel *et al.*, 2002a), l'incrément de longueur de fissure *critique* Δa_c (correspondant au début du plateau de la courbe-R) et la valeur plateau de la résistance G_{Rc} sont ici supposés dépendants de la taille caractéristique D [Eq.(2)]. Afin d'assurer des effets de taille cohérents et rationnels de ces deux caractéristiques de la courbe-R, l'utilisation d'un critère de rupture volumique est nécessaire intégrant le volume de la FPZ et un taux de restitution d'énergie critique d'endommagement volumique (Morel, 2007). Ainsi, si on suppose que l'effet de taille sur la longueur interne Δa_c est transitionnel entre deux comportements asymptotiques définis par :

$$\Delta a_c(D) = \begin{cases} c_0 \left[1 + \left(\frac{D}{D_{ca}} \right)^{\beta_c} \right] & \text{si } D < D_{max} \\ \Delta a_{cmax} & \text{si } D > D_{max}, \end{cases} \quad [3]$$

où, pour les structures de tailles $D \ll D_{ca}$, la longueur interne tend vers c_0 qui correspond à la borne inférieure de la longueur interne (longueur minimale de la FPZ), et, pour les structures de tailles $D \gg D_{ca}$, $\Delta a_c \sim D^{\beta_c}$ où β_c est un exposant d'échelle, alors, l'effet de taille sur la valeur plateau G_{Rc} de la courbe-R sera également transitionnel entre deux comportements asymptotiques tels que :

$$G_{Rc}(D) = \begin{cases} G_{R0} \left[1 + \left(\frac{D}{D_c} \right)^{\beta_c} \right] & \text{si } D < D_{max} \\ G_{Rcmax} & \text{si } D > D_{max}, \end{cases} \quad [4]$$

où, pour les structures de tailles $D \ll D_c$, G_{Rc} tend vers la résistance initiale G_{R0} , tandis que pour les structures de grandes tailles ($D \gg D_c$), la valeur plateau de la résistance évolue en fonction de la taille D comme une loi puissance caractérisée par le même exposant d'échelle β_c que celui gérant l'effet de taille de la longueur interne Δa_c [Eq.(3)]. De plus, afin d'assurer un effet d'échelle rationnnel sur la contrainte nominale, on montrera dans la suite que l'exposant d'échelle $0 < \beta_c < 1$. De plus, si $0 < \beta_c < 0,5$, on parlera alors de *faibles* effets de taille sur la courbe-R tandis que, si $0,5 < \beta_c < 1$, on parlera de *forts* effets de taille. D'autre part, pour les grandes tailles de structures, les lois puissance utilisées dans les Eq.(3) et (4) prédisant une croissance infinie de la longueur interne Δa_c et de la valeur plateau de la résistance G_{Rc} (ce qui semble totalement déraisonnable), il a été nécessaire d'introduire une borne supérieure D_{max} . Ainsi, pour les structures de tailles $D > D_{max}$, la longueur interne

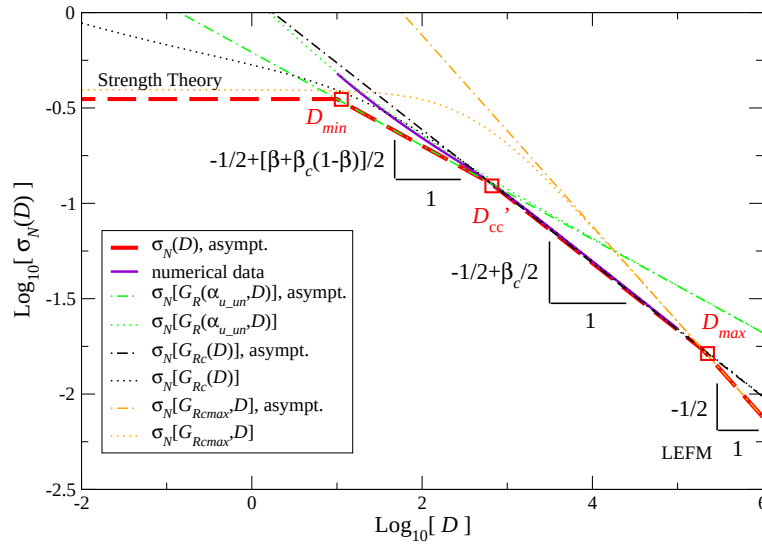


Figure 2. Effet de taille sur la contrainte nominale σ_N [Eq.(7)] dans le cas d'un faible effet d'échelle sur la courbe-R, i.e. $0 < \beta_c < 0.5$

Δa_c [Eq.(3)] atteint une borne supérieure notée Δa_{cmax} correspondant à la longueur interne maximale (longueur maximale de la FPZ) et la valeur plateau G_{Rc} de la résistance [Eq.(4)] reste alors constante et égale à G_{Rcmax} . Ainsi, pour les structures de tailles $D > D_{max}$, la courbe-R devient indépendante de la taille D . Enfin, notons qu'en pratique, l'effet de taille sur la courbe-R [Eq.(2)] est obtenu par l'intermédiaire du préfacteur $\phi(D)$ et de la longueur interne $\Delta a_c(D)$ [Eq.(3)].

3. Longueur relative de fissure au pic de charge

Conformément à la loi d'effet d'échelle Bažant (Bažant *et al.*, 1990, Bažant, 1997), lorsque la force externe P appliquée à la structure atteint la charge au pic P_u , la contrainte nominale σ_N peut être exprimée en fonction de la résistance G_R correspondante comme :

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{E' G_R(\alpha_u)}{D g(\alpha_u)}}, \quad [5]$$

où α_u correspond à la longueur relative de fissure au pic de charge, i.e., $\alpha_u = a_u/D$ (a_u étant la longueur de fissure sous P_u), et $g(\alpha)$ est la fonction adimensionnelle du taux de restitution d'énergie (dépendant de la géométrie de la structure). Notons que la longueur relative de fissure au pic α_u peut aussi s'exprimer comme $\alpha_u = a_u/D = (a_0 + \Delta a_u)/D = \alpha_0 + \Delta a_u/D$ où $\alpha_0 = a_0/D$ correspond à la longueur relative d'entaille initiale et Δa_u correspond à l'incrément de longueur de fissure au pic (i.e., $\Delta a_u = a_u - a_0$).

Donc, à partir de l'Eq.(5), connaissant la courbe-R $G_R(\alpha)$ [Eq.(2)] et la fonction $g(\alpha)$, l'étude de l'effet de taille sur la résistance nominale σ_N revient à estimer l'évolution de la longueur relative de fissure α_u au pic de charge en fonction de la taille D des structures. En fait, la condition de pic est bien connue (Bažant *et al.*, 1991, Morel *et al.*, 2005) et la longueur relative de fissure α_u s'obtient en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{G_R'(\alpha)}{G_R(\alpha)} = \frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}, \quad [6]$$

où $G_R'(\alpha) = \partial G_R(\alpha)/\partial \alpha$ et $g'(\alpha) = \partial g(\alpha)/\partial \alpha$. Dans le cas présent, la résolution de l'Eq. (6) montre différents comportements de la longueur relative de fissure α_u en fonction de la taille D des structures (Morel, 2007). A partir des petites tailles de structure, la longueur relative de fissure α_u tend rapidement vers une solution unique α_{uun} (i.e., indépendante de la taille D), puis cette solution unique disparaît au profit d'une longueur relative de fissure $\alpha_u = (a_0 + \Delta a_c)/D$ (i.e., la force au pic est obtenue au début du plateau de la courbe-R) et enfin pour les structures de très grandes tailles $\alpha_u \rightarrow \alpha_0$ (où $\alpha_0 = a_0/D$ correspond à la longueur relative d'entaille initiale) du fait que la longueur relative de la FPZ devient négligeable dans les structures de grandes tailles ($\theta = \Delta a_c(D)/D \rightarrow 0$ quand $D \rightarrow \infty$). Néanmoins, l'effet de taille sur α_u est très sensible à la valeur de l'exposant d'échelle β_c (caractérisant l'intensité de l'effet

de taille sur la courbe-R). Notamment, plus β_c augmente, plus la borne supérieure D_{max} diminue. En effet, dans le cas d'un fort effet de taille (i.e., $0.5 < \beta_c < 1$), la FPZ atteint très rapidement sa taille maximum Δa_{cmax} (longueur interne maximum), i.e., pour une taille D_{max} faible et, en conséquence, la courbe-R devient très rapidement indépendante de la taille D . Ainsi, dans le cas d'un fort effet de taille sur la courbe-R ($0.5 < \beta_c < 1$), si la solution unique $\alpha_u = \alpha_{uun}$ reste observable à partir des petites tailles de structures, cette solution reste également valable lorsque la taille $D > D_{max}$, i.e., pour une courbe-R devenue indépendante de la taille D , et, lorsque $D \rightarrow \infty$ alors $\alpha_u \rightarrow \alpha_0$ (car $\alpha_u = \alpha_0 + \Delta a_{cmax}/D$ et $\Delta a_{cmax}/D \rightarrow 0$ quand $D \rightarrow \infty$).

4. Effet de taille sur la contrainte nominale

Connaissant l'évolution de la longueur relative de fissure α_u au pic de charge, il est alors possible d'estimer l'effet de taille sur la résistance au pic $G_R(\alpha_u)$ et sur la contrainte nominale σ_N [Eq.(5)]. Il a été montré qu'à partir d'une analyse asymptotique fondée sur l'évolution des caractéristiques énergétiques, il était possible d'estimer les comportements asymptotiques de la contrainte nominale σ_N et ce dans le cas d'un faible ou d'un fort effet de taille sur la courbe-R (Morel, 2007).

Ainsi, dans le cas d'un faible effet de taille sur la courbe-R (i.e., pour un exposant d'échelle $0 < \beta_c < 0.5$), les comportements asymptotiques attendus de la contrainte nominale σ_N sont de la forme :

$$\sigma_N \simeq \begin{cases} const. & \text{si } D \ll D_{min} \\ D^{-\frac{1}{2} + \frac{\beta + \beta_c(1-\beta)}{2}} & \text{si } D_{min} \ll D \ll D_{cc}' \\ D^{-\frac{1}{2} + \frac{\beta_c}{2}} & \text{si } D_{cc}' \ll D \ll D_{max} \\ D^{-\frac{1}{2}} & \text{si } D \gg D_{max}, \end{cases} \quad [7]$$

tandis que dans le cas d'un fort effet de taille sur la courbe-R (i.e., $0.5 < \beta_c < 1.0$), les comportements asymptotiques sont les suivants :

$$\sigma_N \simeq \begin{cases} const. & \text{si } D \ll D_{min} \\ D^{-\frac{1}{2} + \frac{\beta + \beta_c(1-\beta)}{2}} & \text{si } D_{min} \ll D \ll D_{max} \\ D^{-\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}} & \text{si } D_{max} \ll D \ll D_{max}'' \\ D^{-\frac{1}{2}} & \text{si } D \gg D_{max}'', \end{cases} \quad [8]$$

Notons que les tailles d'intersection des différents comportements asymptotiques mentionnées dans les Eq. (7) et (8) sont obtenues analytiquement (Morel, 2007). Les comportements asymptotiques définis en (7) sont représentés en Fig.(2)

Les Eq.(7) et (8) montrent que, quelle que soit l'intensité de l'effet de taille sur la courbe-R, les comportements asymptotiques extrêmes attendus sont en accord ceux proposés dans la loi d'effet de taille de Bažant [Eq.(1)], i.e., pas d'effet d'échelle dans les structures de petites tailles et effet d'échelle de la MLER dans les structures de grandes tailles. En revanche, pour les structures de tailles intermédiaires, l'effet de

taille apparaît ici plus complexe montrant notamment l'existence de comportements asymptotiques supplémentaires. Notons qu'afin d'assurer un effet de taille rationnel de la contrainte nominale σ_N (i.e., nul ou décroissant), les différents exposants des comportements asymptotiques définis dans les Eq.(7) et (8) conduisent à une valeur de l'exposant d'échelle $0 < \beta_c < 1$. Notons également que les comportements asymptotiques définis en (7) et (8) ont été vérifiés par comparaison aux résultats numériques obtenus à partir de la résolution de l'Eq.(6).

D'autre part, sur la Fig.3, l'effet de taille sur σ_N attendu dans le cas d'un faible effet d'échelle sur la courbe-R (7) est comparé à la loi d'effet de taille de Bažant (1). Cette dernière est ici ajustée à partir des résultats numériques obtenus dans un domaine de tailles : $20\text{mm} \leq D \leq 400\text{mm}$ (très largement supérieur au domaine pouvant généralement être atteint expérimentalement). La Fig.3 montre que si l'accord entre la présente loi d'échelle (7) et la loi de Bažant (notée ici SEL : Size Effect Law) est très satisfaisant pour les petites tailles, il n'en est pas de même pour les grandes tailles de structures. En effet, on constate un décalage vers la droite de l'asymptote relative à l'effet de taille attendu par la MLER comparé à la loi de Bažant. Ce décalage vers la droite souligne que dans le cas d'un faible effet de taille, la loi d'effet de taille de Bažant sousestime la résistance nominale des structures de grandes tailles. Dans le cas de la Fig.3, la résistance nominale estimée par la loi de Bažant est deux fois plus faible que celle attendue par la présente théorie soit une sousestimation de l'ordre de 100%. De plus, il a été montré que le décalage vers la droite de l'asymptote relative à la MLER diminuait avec l'augmentation de l'effet de taille sur la courbe-R, jusqu'à

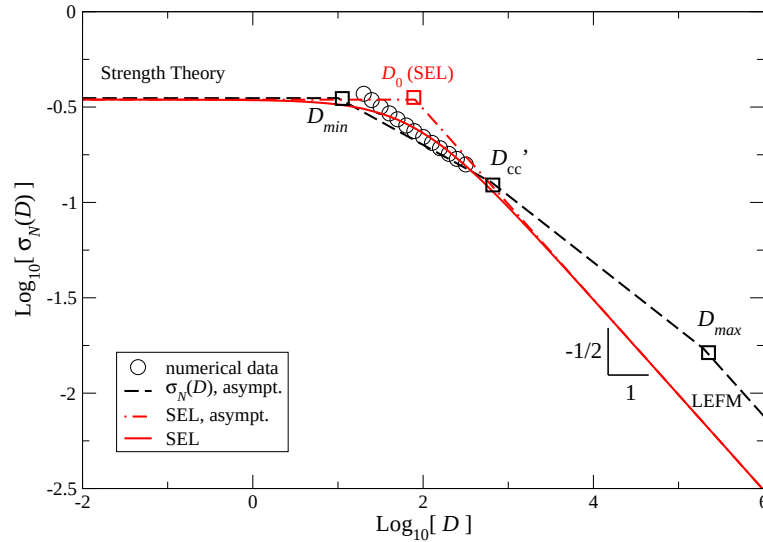


Figure 3. Comparaison entre la loi d'effet de taille de Bažant (1) et l'effet de taille attendu dans le cas d'un faible effet d'échelle ($0 < \beta_c < 0.5$) sur la courbe-R (7)

être quasi-nul dans le cas d'un fort effet de taille (Morel, 2007). Ainsi, paradoxalement la loi de Bažant (fondée sur une courbe-R unique) décrit parfaitement l'effet de taille sur la contrainte nominale dans le cas où l'effet d'échelle sur les propriétés énergétiques est important tandis qu'elle sousestime grandement les contraintes nominales des structures de grandes tailles dans le cas d'un faible effet d'échelle la courbe-R.

5. Conclusion

L'extension de la loi d'effet de taille de Bažant dans le cas d'une courbe-R dépendante de la taille des structures (Morel, 2007) a montré que, si les comportements asymptotiques attendus aux petites et grandes tailles restaient en accord avec la loi de Bažant, l'effet d'échelle obtenu pour les structures de tailles intermédiaires était en revanche plus complexe et pouvait être décrit par différents comportements asymptotiques (plutôt que par un simple raccordement approximatif). La conséquence principale de cette étude est la mise en évidence d'un décalage vers la droite de l'asymptote relative à l'effet de taille de la MLER constaté pour les specimens de grandes tailles. Dans le cas d'un faible effet de taille sur la courbe-R (i.e., $0 < \beta_c < 0.5$), on constate en effet une possibilité d'optimisation conséquente de la taille des structures, le gain de charge pouvant atteindre 100% pour les structures de grandes tailles en comparaison aux prédictions de la loi d'effet de taille de Bažant.

Remerciements

L'auteur souhaite remercier Zdenek Bažant pour ses encouragements vis à vis de ce travail ainsi que Jaime Planas pour de constructives discussions.

6. Bibliographie

- Bažant Z., « Scaling of quasibrittle fracture : asymptotic analysis », *International Journal of Fracture*, vol. 83, p. 19-40, 1997.
- Bažant Z., Cedolin L., *Stability of Structures : Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, New York, USA, 1991.
- Bažant Z., Kazemi M., « Size effect in fracture of ceramics and its use to determine fracture energy and effective process zone length », *Journal of the ACM*, vol. 73 (7), p. 1841-1853, 1990.
- Morel S., « R-curve and size effect in quasibrittle fractures. Case of notched structures. », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, p. 4272-4290, 2007.
- Morel S., Bouchaud E., Schmittbuhl J., Valentin G., « R-curve behaviour and roughness development of fracture surfaces », *International Journal of Fracture*, vol. 114, p. 307-325, 2002a.
- Morel S., Durado N., Valentin G., Morais J., « Wood : a quasibrittle material. R-curve behavior and peak load evaluation », *International Journal of Fracture*, vol. 131, p. 385-400, 2005.