

Méthodes d'assimilation de données de température dans les ouvrages d'art

Alexandre Nassiopoulos

LCPC – Laboratoire Central des Ponts et Chaussées – Service Métrologie et Instrumentation, Paris – 58, Bd Lefebvre 75732 Paris cedex 15

RESUME. La reconstruction rapide du champ de températures au sein d'une structure de génie civil est un élément clef d'une démarche globale de contrôle de santé. Les variations de comportement dynamique des ouvrages d'art sont dues pour une large part aux variations de température. Pour remonter aux propriétés mécaniques intrinsèques de la structure, il est nécessaire d'éliminer ces effets thermiques. On propose pour cela différents algorithmes d'assimilation. L'objectif est de reconstituer le champ de températures dans une structure à partir de mesures thermiques fournies durant un intervalle de temps $[0, T]$ par des capteurs ponctuels répartis dans celle-ci. La minimisation d'une fonctionnelle de coût dans un espace de type H^1 écarte la difficulté de convergence liée à la méthode adjointe. Associée à une formulation duale, la méthode proposée donne lieu à des algorithmes permettant une reconstruction rapide et précise de la température finale.

MOTS-CLÉS : assimilation thermique, contrôle optimal, méthode adjointe.

ABSTRACT. Temperature variations and their effects on structures act like perturbations for damage detection techniques based on vibration monitoring. The elimination of temperature effects appears as a bottleneck in this field. The work presented here deals with the reconstruction of the thermal field inside a structure when only some pointwise temperature measurements along a time interval $[0, T]$ are available. A model-based data assimilation approach is proposed. The algorithm builds upon optimal control theory applied to the determination of initial temperature and heat sources. The regularized least-squares performance index is minimized here over a space of smooth enough initial temperatures and boundary fluxes. It is proved numerically that this choice eliminates a known difficulty of the adjoint method. Moreover, a dual framework constructs both accurate and fast reconstruction algorithms.

KEYWORDS : temperature assimilation, optimal control, adjoint method.

1. INTRODUCTION

La connaissance du champ de températures est essentielle dans plusieurs applications en génie civil. A titre d'exemple, certaines méthodes de contrôle de santé des structures sont basées sur la surveillance en continu des propriétés vibratoires (*Ambient Vibration Monitoring*). Elles visent à détecter des modifications du comportement mécanique et localiser ainsi des défauts (Basseville *et al.*, 2000 ; Wenzel and Pichler, 2005). Or les variations de température induisent des modifications des propriétés vibratoires qui sont souvent d'un ordre de grandeur plus important que les variations résultant d'un endommagement (Farrar *et al.*, 2003). Il est donc essentiel dans ce cas de bien maîtriser les champs de températures auxquelles est soumise la structure au moment de la mesure.

Le développement de méthodes d'assimilation de la température est un premier pas dans cette direction. En effet, mis à part les capteurs à fibres optiques utilisant l'effet Raman ou les techniques d'imagerie infrarouge, les capteurs de température ne peuvent actuellement fournir que des mesures ponctuelles de la température. De surcroît, certaines parties d'un ouvrage peuvent tout simplement être

inaccessibles à des mesures directes. Il est nécessaire de pouvoir reconstruire le champ de températures dans l'ensemble de la structure grâce à une méthode d'assimilation de données. Parmi toutes les approches possibles, on éliminera celles de type filtrage de Kalman en temps continu. Elles conduisent en effet à la résolution d'équations de Riccati de très grande dimension, ce qui ne semble pas convenir à une utilisation en temps réel.

Nous abordons ici le problème de l'assimilation de données du point de vue des problèmes inverses qui font l'objet d'une importante littérature (Engl *et al.*, 1994). Les problèmes inverses liés aux transferts de chaleur ont joui d'un intérêt tout particulier du fait du large éventail d'applications concernées (Jarny *et al.*, 1991 ; Alifanov, 1994 ; Beck *et al.*, 1985 ; Özisik and Orlande, 2000). Ces problèmes sont en général mathématiquement mal posés et nécessitent une certaine forme de régularisation.

Afin de déterminer le champ de températures grâce à des mesures ponctuelles, la démarche suivie ici vise à reconstruire des sources inconnues surfaciques ou volumiques à l'origine de ces mesures. Le problème est formulé comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés avec une régularisation de Tikhonov. Nous utilisons tous les outils liés à la théorie du contrôle optimal (Lions, 1968) pour minimiser une fonctionnelle quadratique qui mesure l'écart entre les données et le champ de températures reconstruit. Le gradient de cette fonctionnelle est calculé grâce à l'équation *adjointe*. Il est alors possible d'utiliser des algorithmes de minimisation classiques.

On montre numériquement que la minimisation de cette fonctionnelle dans un espace de fonctions de type H^1 de Sobolev judicieusement choisi permet d'éliminer le défaut de convergence au temps final, difficulté classique de la méthode adjointe. Cela permet de reconstruire précisément la température finale. Nous proposons aussi une version duale du problème qui conduit à des algorithmes rapides, bien adaptés au calcul en temps réel.

2. FORMULATION DU PROBLEME GENERAL

Dans ce paragraphe, on décrit le cadre général du problème d'inversion thermique dans le cas d'un solide tridimensionnel occupant un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. Si la structure est à une température initiale $\theta^0(x)$, l'évolution au cours du temps $t \in [0, T]$ du champ de températures $\theta(x, t)$ dans Ω est régie par l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \text{div}(k \text{grad } \theta) = f & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ k \text{grad } \theta \cdot \vec{n} + \alpha \theta = \Phi & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ \theta(x, 0) = \theta^0(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad [\text{Eq. 1}]$$

Dans [Eq. 1], $\Phi(x, t) = g(x, t) + \alpha \theta_{\text{ext}}$ représente les apports de chaleur à la surface $\partial\Omega$, g étant le flux entrant, θ_{ext} la température externe et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la surface $\partial\Omega$ sortant de Ω . Les échanges de surface sont modélisés par des conditions aux limites de type Fourier-Robin. Le rayonnement est pris en compte dans le calcul du coefficient d'échange α , et ceci semble être une approximation valable dans les cas usuels en génie civil. Pour la clarté de l'exposé, la masse volumique ρ , la chaleur massique c et le tenseur de conductivité k seront supposés constants, sans que ceci ne constitue une limite des méthodes présentées.

On suppose que m capteurs sont répartis à l'intérieur de la structure aux points $x_k, k = 1 \dots m$. Ils fournissent en continu les mesures $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m, t \in [0, T]$. A partir de ces mesures, l'objectif est de reconstruire le champ de températures sur toute la fenêtre temporelle $[0, T]$, tout en se focalisant sur la meilleure reconstruction possible de la température finale $\theta(x, T)$. Une manière d'y parvenir est de déterminer le triplet $\{\theta^0, \Phi, f\}$, c'est à dire la condition initiale et les sources surfaciques ou volumiques responsables de ces mesures.

Le problème peut être formulé comme un problème de minimisation au sens des moindres carrés de la différence entre les mesures disponibles $\{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m$ et les valeurs aux capteurs d'un champ de température reconstruit. Le problème étant mal posé au sens de Hadamard, on emploie la méthode de régularisation de Tikhonov (Engl *et al.*, 1994) pour garantir la stabilité du calcul numérique même avec des données bruitées. Le problème consiste à minimiser une fonctionnelle de la forme

$$J(\{\theta^0, \Phi, f\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_0^T (\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t))^2 dt + \frac{\varepsilon}{2} \|\{\theta^0, \Phi, f\}\|_X^2 \quad [\text{Eq. 2}]$$

Le dernier terme dans [Eq. 2] correspond au terme de régularisation, ε étant un petit paramètre qui donne à J une convexité stricte. X désigne un espace fonctionnel normé tel que [Eq. 1] admette une solution suffisamment régulière lorsque $\{\theta^0, \Phi, f\} \in X$. On note $\|\cdot\|_X$ la norme de X . Le triplet $\{\theta^0, \Phi, f\}$ est la variable de contrôle. Le choix de X a une influence primordiale sur la solution du problème comme nous le verrons par la suite.

3. LA METHODE ADJOINTE DANS L^2

Pour simplifier la présentation, nous nous intéresserons dorénavant au cas où $f = 0$ et $\theta^0 = 0$. L'objectif de l'assimilation thermique est alors la reconstruction de la source surfacique Φ .

3.1. THEORIE

Supposons dans un premier temps que le flux Φ appartient à l'espace $V = L^2(0, T; L^2(\partial\Omega))$. L'espace V est muni du produit scalaire

$$(v, w) = \int_{\partial\Omega \times [0, T]} v w d\gamma dt \quad [\text{Eq.3}]$$

Le problème [Eq. 1] admet une solution unique θ , et nous admettrons que nous pouvons définir les mesures ponctuelles $\{\theta(x_k, t)\}_{k=1}^m = L^2(0, T)^m$. Ceci est un point crucial du point de vue théorique, mais son analyse n'est pas l'objectif de ce papier. En notant $M = L^2(0, T)^m$ l'espace de mesure, on définit l'opérateur $C : V \rightarrow M$ tel que $C\theta(x, t) = \{\theta(x_k, t)\}_{k=1}^m$.

La reconstruction consiste à déterminer Φ tel que

$$C\theta(x, t) = \{\theta_k^d(t)\}_{k=1}^m \quad [\text{Eq. 4}]$$

Ce problème est mathématiquement mal posé : une infime modification des données entraîne de grandes variations dans la solution. En outre, sa résolution numérique pose d'importants problèmes de

stabilité. L'approche classique consiste à remplacer ce problème par un problème bien posé fournissant une solution approchée. Pour cela nous définissons la fonctionnelle régularisée

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t))^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega \times [0, T]} \Phi^2 d\gamma dt \quad [\text{Eq. 5}]$$

et nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Phi \in V \text{ tel que} \\ J(\Phi) = \min_{\Phi \in V} J(\Phi) \end{array} \right. \quad [\text{Eq. 6}]$$

En suivant la démarche habituelle du contrôle optimal (Lions, 1968), on définit l'état adjoint p , solution de l'équation adjointe, i.e. l'équation de la chaleur rétrograde :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\rho c \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}(k \text{grad } p) = \sum_{k=1}^m (\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t)) \delta_{x_k} & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ k \text{grad } p \cdot \vec{n} + \alpha p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \\ p(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad [\text{Eq. 7}]$$

Le terme source de cette équation est une somme de masses de Dirac. Par conséquent, p ne peut être défini que par une méthode de transposition. Nous ne détaillerons pas cela ici, mais il s'agit néanmoins d'un point important qui conditionne beaucoup l'implémentation des algorithmes.

D'après le résultat classique de la méthode adjointe, le gradient ∇J de J est donné par

$$\nabla J(\Phi) = p|_{\partial\Omega} + \varepsilon \Phi \quad [\text{Eq. 8}]$$

On peut résoudre numériquement le problème de minimisation [Eq. 6] grâce à un algorithme de descente tel que la méthode du gradient conjugué. A chaque itération, il est nécessaire de résoudre les problèmes [Eq. 1] et [Eq. 7] avec des données changeantes. Les deux problèmes sont de même nature donc les mêmes méthodes de résolution peuvent être employées.

3.2. RESULTATS

Les résultats donnés sur la figure 1 montrent les inconvénients de la méthode telle qu'elle a été décrite jusqu'ici. Ils sont issus de simulations effectuées dans le cas unidimensionnel d'une poutre de dimension L . Le domaine considéré est $\Omega = [0, L]$, et le flux recherché se réduit à un couple de fonctions $\{\Phi_0(t), \Phi_1(t)\}$ en $x = 0$ et $x = L$ respectivement.

Toutes les constantes de matériau sont choisies égales à 1. Une simulation directe avec des flux imposés fournit des mesures aux points $L/5$, $L/2$ et $4L/5$ où sont supposés placés des capteurs. Ces enregistrements sont utilisés comme données pour l'algorithme inverse.

Le modèle est discrétisé en espace (resp. en temps) à l'aide d'éléments finis P1-Lagrange (resp. d'un schéma d'Euler implicite). La figure 1-a permet de comparer les flux reconstruits (lignes pointillées) aux flux imposés (lignes continues). Les flux sont correctement reconstruits sur presque toute la fenêtre temporelle, mais la qualité de l'approximation devient très mauvaise lorsqu'on s'approche de l'instant final. Après quelques oscillations, le flux reconstruit s'annule pour $t = T$. Il en résulte que

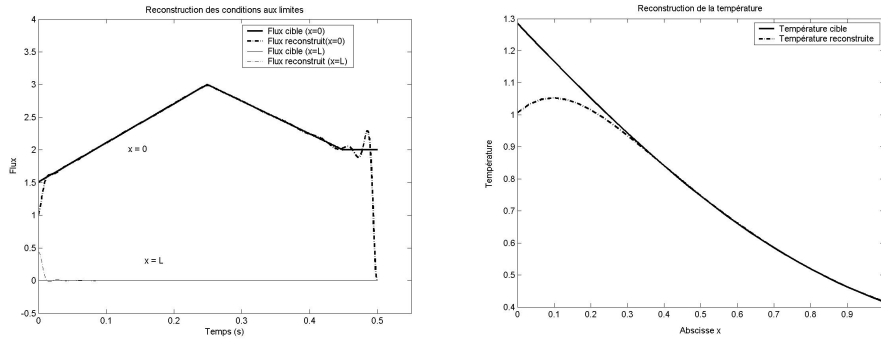


Figure 1 : a) Reconstruction dans L^2 : flux en $x = 0$ et $x = L$ (à gauche) ; b) température finale (à droite).

même si le champ de températures est bien reconstruit sur presque tout l'intervalle temporel, la reconstruction de la température finale est très mauvaise (figure 1-b) ; or c'est précisément l'information la plus utile dans les applications temps réel !

Ce défaut de convergence bien documenté (Alifanov, 1994 ; Huang and Wuang, 1999) est dû à la condition $p(T) = 0$ imposée à l'état adjoint [Eq. 7], qui implique $\Phi(T) = 0$. Or cette condition est nécessaire pour que la relation [Eq. 8] soit vérifiée. Une autre définition de l'état adjoint s'obtient grâce à un choix différent de l'espace X et de son produit scalaire, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

4. LA METHODE ADJOINTE DANS H^1

4.1. THEORIE

Nous supposons cette fois que le flux Φ appartient à l'espace $V = H^1(0, T; L^2(\partial\Omega))$. L'espace V est muni du produit scalaire

$$(v, w)_V^2 = \int_{\Omega \times [0, T]} v w d\gamma dt + \int_{\Omega \times [0, T]} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} d\gamma dt \quad [\text{Eq. 9}]$$

On admettra, comme dans le cas L^2 , que la solution de [Eq. 1] permet de définir $\{\theta(x_k, t)\}_{k=1}^m \in L^2(0, T)^m$ avec dépendance continue par rapport aux données.

Nous considérons le nouveau problème de contrôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Phi \in V = H^1(0, T; L^2(\partial\Omega)) \text{ tel que} \\ J(\Phi) = \min_{\Phi \in V} J(\tilde{\Phi}) \end{array} \right. \quad [\text{Eq. 10}]$$

où la fonctionnelle régularisée s'écrit cette fois

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\theta(x_k, t) - \theta_k^d(t))^2 + \frac{\varepsilon}{2} \left[\int_{\Omega \times [0, T]} \Phi^2 d\gamma dt + \int_{\Omega \times [0, T]} \frac{\partial \Phi}{\partial t}^2 d\gamma dt \right] \quad [\text{Eq. 11}]$$

Ici, contrairement au cadre L^2 , pour obtenir le gradient il est nécessaire d'introduire une nouvelle fonction q vérifiant

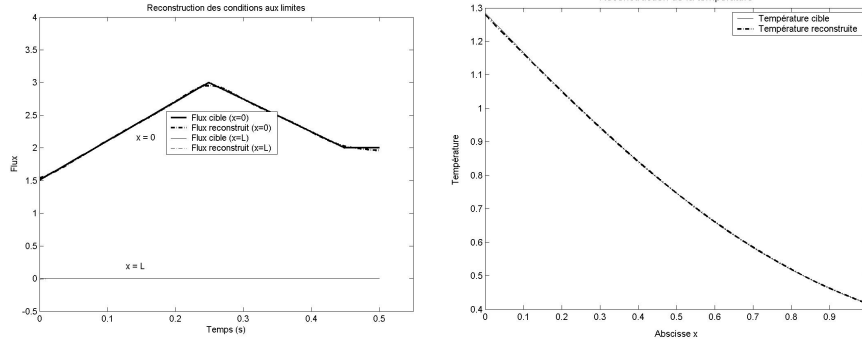


Figure 2 : Reconstruction dans H^1 : a) flux en $x = 0$ et $x = L$ (à gauche) ; b) température finale (à droite).

$$\int_{\Omega \times [0,T]} q v d\gamma dt + \int_{\Omega \times [0,T]} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} d\gamma dt = \int_{\Omega \times [0,T]} p v d\gamma dt \quad \forall v \in V \quad [\text{Eq. 12}]$$

On peut montrer alors que le gradient est donné par

$$\nabla J(\Phi) = q + \varepsilon \Phi \quad [\text{Eq. 13}]$$

4.2. RESULTATS

L'exemple unidimensionnel précédent permet d'illustrer de manière simple l'intérêt du choix de l'espace de contrôle $V = H^1(0,T; L^2(\partial\Omega))$. Dans ce cas, le gradient est un couple de fonctions $\{q_1(t), q_2(t)\}$ solutions de

$$\begin{cases} -\frac{d^2 q_0}{dt^2} = p(0,t) & \text{dans } [0,T] \\ -\frac{dq_0(0)}{dt} = \frac{dq_0(T)}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\frac{d^2 q_L}{dt^2} = p(L,t) & \text{dans } [0,T] \\ -\frac{dq_L(0)}{dt} = \frac{dq_L(T)}{dt} = 0 \end{cases} \quad [\text{Eq. 14}]$$

Ces deux problèmes sont en réalité la forme forte de [Eq. 12] dans le cas unidimensionnel. On peut remarquer que les fonctions $q_0(t)$ et $q_L(t)$ vérifient une condition de Neumann en $t = T$. Par conséquent leurs valeurs finales respectives ne sont pas nulles, contrairement à l'état adjoint du cas L^2 , ainsi que les valeurs du flux en $t = T$. La reconstruction du champ de températures est bien meilleure près de l'instant final comme l'illustre la figure 2 qui reprend l'application numérique précédente. Les courbes de la température de synthèse et de la température reconstruite sont quasiment superposées.

Le choix de mesures synthétiques, souvent qualifié de crime inverse, permet d'établir la précision de la méthode. Il se trouve que la stabilité de la reconstruction vis-à-vis d'incertitudes de mesure est également très bonne, comme le montrent d'autres tests que l'on ne rapportera pas ici.

5. FORMULATION DUALE

En appliquant la dualité de Fenchel-Rockafellar au problème initial [Eq. 6], nous obtenons une nouvelle formulation du problème qui consiste à minimiser une fonctionnelle dans l'espace de mesures $M = L^2(0,T)^m$. Cet espace est de dimension beaucoup plus réduite que l'espace de contrôle du problème de départ. Après discrétisation, les inconnues sont donc de taille beaucoup plus réduite,

ce qui induit une réduction importante des temps de calcul. La version duale permet ainsi l'implémentation d'algorithmes pouvant être utilisés quasiment en temps réel.

La minimisation peut être effectuée dans l'espace de type H^1 dans ce type de formulation également.

6. APPLICATION : ENSOLEILLEMENT D'UN BLOC DE BETON

L'exemple ci-dessous est une illustration de la méthode sur un modèle numérique représentant un bloc de béton. Ce dispositif a été utilisé pour une validation expérimentale de la méthode.

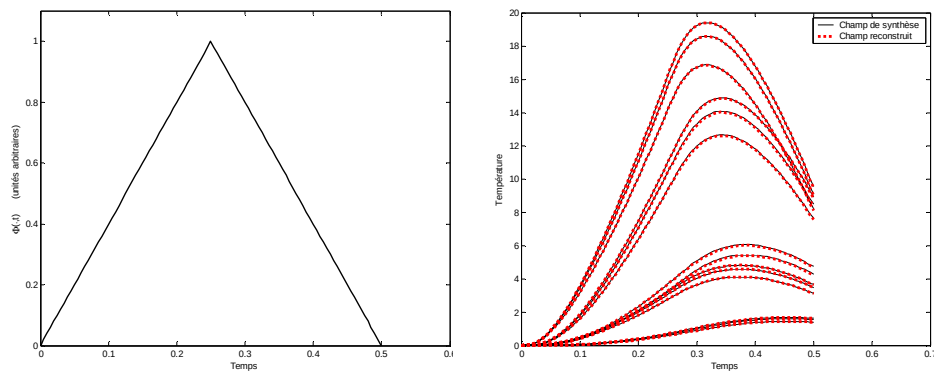


Figure 3 : Reconstruction dans le bloc de béton : a) Variations du flux imposé (à gauche) ; b) Champs de synthèse et reconstruit au niveau des capteurs (à droite).

Le bloc de béton de dimensions $1,5 \times 0,6 \times 0,9 \text{ m}$ est traversé selon la longueur d'un trou débouchant de forme cylindrique de $0,15 \text{ m}$ de diamètre, au centre de la section. 14 capteurs sont répartis de manière homogène à l'intérieur de la structure. Les caractéristiques du matériau sont les suivantes : $k = 1,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $\rho = 2300 \text{ kg.m}^{-3}$, $c = 900 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $\alpha = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Ces constantes sont rendues adimensionnelles pour les simulations.

Un flux connu est appliqué sur une partie de la face supérieure du bloc. Ce flux peut représenter par exemple un échauffement dû à une exposition au soleil. Une simulation directe fournit des mesures synthétiques qui sont utilisées ensuite en tant que données pour l'algorithme inverse. La variation temporelle du flux appliqué, ainsi que l'évolution des champs reconstruit et de synthèse sont donnés sur la figure 3. La qualité de la reconstruction est très satisfaisante : l'erreur relative intégrée sur l'ensemble du domaine est de l'ordre du centième. Le calcul ne dure que 500 secondes sur un ordinateur Pentium 4 à 2 GHz. La figure 4 donne un aperçu du champ tridimensionnel obtenu par simulation directe et grâce à l'algorithme de reconstruction.

7. CONCLUSIONS

La méthode adjointe appliquée à un problème inverse d'assimilation de données thermiques transitoires a confirmé le défaut de convergence des algorithmes de descente pour ce qui est de la température finale. Néanmoins, on s'affranchit de cette difficulté connue et on reconstruit correctement la température finale en recherchant les inconnues du modèle dans des espaces de fonctions assez

régulières. La formulation duale conduit à des algorithmes de reconstruction avec des coûts de calcul très faibles permettant d'envisager des applications temps réel.

La méthode générale a été présentée dans le cas de la reconstruction d'un flux inconnu Φ . Elle peut être adaptée en vue de la reconstruction d'une température initiale ou même d'une source interne volumique f inconnue. D'ores et déjà, ces outils de reconstruction thermique peuvent éliminer les perturbations d'origine thermique dans certains algorithmes de contrôle de santé des structures (Basseville *et al.*, 2006).

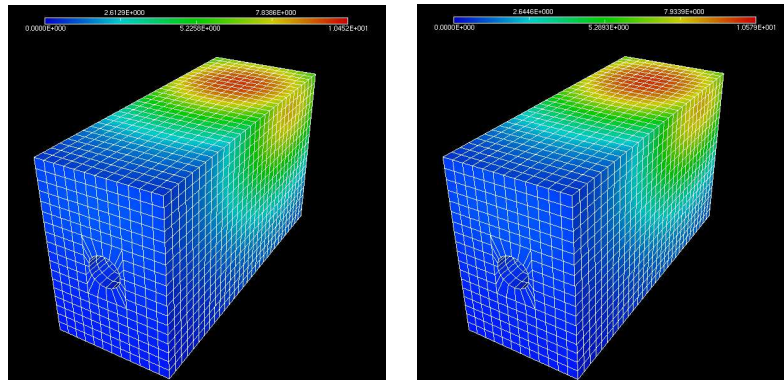


Figure 4 : a) Champ de synthèse(à gauche) ; b) Champ reconstruit(à droite).

8. BIBLIOGRAPHIE

- Alifanov, O. M. (1994) « Inverse Heat Transfer Problems » *Springer-Verlag*, New York.
- Basseville, M., Abdelghani, M., Benveniste, A. (2000) « Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring » *Automatica*, vol. 36, n° 1, p. 101-109.
- Basseville, M., Bourquin, F., Mevel, L., Nasser, H., Treysse, F. (2006) « Merging sensor data from multiple temperature scenarios for vibration-based monitoring of civil structures » *Proceedings of the 3rd European Workshop on Structural Health Monitoring*, Granada, p. 499-506.
- Beck, J.V., Blackwell, B., Clair, C.S. (1985) « Inverse heat conduction, ill-posed problems » *Wiley interscience*, New York.
- Engl, H.W., Hanke, M., Neubauer, A. (1994) « Regularization of Inverse Problems » *Kluwer Academic Publishers*.
- Farrar, C., Hemez, F., Shunk, D., Stinemates, D., Nadler, B. (2003) « A review of SHM literature : 1996-2001 » *Los Alamos National Laboratory Internal Reports*.
- Huang, C.H., Wang, S.P. (1999) « A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method » *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 42, p. 3387-3403.
- Jarny, Y., Özisik, M.N., Bardon, J.P. (1991) « A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction » *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 34, n° 11, p. 2911-2919.
- Lions, J.L. (1968) « Optimal control of systems governed by PDEs » *Dunod*.
- Özisik, M.N., Orlande, H.R.B. (2000) « Inverse Heat Transfer » *Taylor and Francis*.
- Wenzel, H., Pichler, D. (2005) « Ambient Vibration Monitoring » *E-Book*, ISBN ; 0-470-02431-3.