

# Modélisation du comportement élastoplastique avec l'endommagement non local de béton

Assef MOHAMAD-HUSSEIN

LML – Laboratoire de Mécanique de Lille – UMR 8107 CNRS – Polytech'Lille – 59655 Villeneuve d'Ascq

---

*RESUME.* Les matériaux cimentaires, comme le béton, présentent un comportement élastoplastique couplé à l'endommagement. La plasticité est liée au processus de glissement tandis que l'endommagement est attribué à la microfissuration induite et à sa croissance. Dans l'utilisation de la méthode d'éléments finis, les analyses ont montré la dépendance pathologique du maillage liée à la localisations des déformations. La largeur de la bande de localisation diminue et converge vers zéro quand le maillage est raffiné. Une approche de régularisation du problème est donc nécessaire. Après la formulation d'un modèle élastoplastique couplé à l'endommagement pour le béton, la validation du modèle proposé est réalisée par la comparaison entre sa réponse numérique et les expériences des essais homogènes. L'approche de régularisation non locale est utilisée sur l'évolution de l'endommagement, qui produit un comportement radoucissement du matériau. Une application numérique de la formulation non locale est présentée pour un problème aux limites. Cette application montre que les résultats obtenues par le modèle non local sont quasiment indépendants du maillage.

*MOTS-CLÉS :* béton, localisation de déformation, non local.

---

---

*ABSTRACT.* Cement materials, such as concrete, is characterized by an elastoplastic damage behaviour. The plasticity is related to the sliding process, whereas the damage is attributed to the induced microcracks and its growth as well. The finite element method is largely used in the treatment of numerical problems. Local analyses showed that the results are sensitive to the mesh during the strain localisation problem. The width of the band of localization decreases and converges to zero when the mesh is refined. It is thus necessary to use a regularization approach. After the formulation of an elastoplastic damage model for concrete materials, the proposed model is then validated by comparing its numerical response with the experimental data obtained from homogeneous tests. The non local approach is applied on the evolution of damage, that produces a material softening behaviour. A numerical application, using the non local formulation, is performed for a boundary value problem. This application shows that the results obtained from the non local model are independent of the mesh.

*KEYWORDS :* concrete, strain localization, non local.

---

## 1. INTRODUCTION

Des investigations expérimentales extensives ont été réalisées sur le béton pour comprendre le comportement de ce type des matériaux. Le béton présente un comportement élastoplastique couplé à l'endommagement. Le comportement du béton dépend de la pression de confinement. Sous faible pression de confinement, la rupture due à la coalescence des microfissures est le mécanisme principale. Sous pression de confinement plus élevé, la déformation plastique devient le mécanisme prépondérant. L'augmentation de la pression de confinement conduit donc à observer clairement une transition d'un comportement fragile à un comportement ductile. Cependant, aussi bien les propriétés élastique que celles plastique sont affectés par l'endommagement induit par microfissuration. La

déformation plastique est donc couplée à l'endommagement induit et la rupture du matériau a lieu à la suite de création des bandes des déformations localisées. La croissance d'endommagement due à la microfissuration induite crée un comportement radoucissant du matériau. La localisation des déformations est un phénomène dans lequel les déformations se localisent dans des bandes serrées.

D'un point de vue numérique, quelques difficultés peuvent être observées dans la modélisation du comportement radoucissant du matériau. Les analyses montrent la dépendance pathologique des résultats sur la distribution du maillage. Les déformations ou l'endommagement se localisent dans une bande. L'épaisseur de cette bande diminue et converge vers zéro quand le maillage devient plus en plus fin. Le problème aux limites devient alors mal posé due à la perte d'ellipticité. Des approches divers ont été proposées pour régulariser le problème de localisation de déformation et sensibilité au maillage. L'approche non locale est adoptée dans cette étude (Pijaudier-Cabot et Bazant, 1987). La formulation non locale est utilisée pour la description de l'endommagement seulement. La description des déformations élastiques et plastiques restent dans les formes locales.

On présente la formulation d'un modèle élastoplastique couplé à l'endommagement. Une loi d'écoulement non associée est utilisée avec une loi d'écrouissage plastique. Le radoucissement du matériau est lié à l'endommagement induit par microfissurations. L'approche non locale est appliquée sur l'évolution d'endommagement. Des comparaisons effectuées entre les prédictions du modèle et les données expérimentales sont présentées. Une application numérique pour un problème aux limites est réalisée pour montrer la performance du modèle. L'application montre que la formulation non locale se prête bien pour décrire le comportement à la rupture par la localisation de l'endommagement.

## 2. FORMULATION DU MODELE

L'endommagement induit, dans le béton sous compression multiaxiale, est généralement anisotrope due à l'orientation et distribution des microfissures. Cependant, pour des raisons de simplicité, nous supposons dans le cadre de présent travail, dont le but est l'étude du couplage entre la plasticité et l'endommagement non local, que l'endommagement est isotrope. L'hypothèse de petites déformations est adoptée d'office dans cette étude. Le tenseur de déformation,  $d\epsilon$  est décomposé en une partie élastique,  $d\epsilon^e$  et une partie plastique,  $d\epsilon^p$  :

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad [\text{Eq. 1}]$$

### 2.1. COMPORTEMENT ELASTIQUE

Pour les matériaux isotropes, le comportement élastique effectif est déterminé par le module de compressibilité  $k(w)$  et le module de cisaillement  $\mu(w)$ . En se basant sur les considérations micromécaniques, nous avons utilisé les expressions générales des propriétés élastiques effectifs sur un chemin dilué des microfissures. Les propriétés effectifs d'un matériau endommagé peut être exprimé comme:

$$k(w) = k_0 [1 - a_1 H(e_v^e) w], \quad \mu(w) = \mu_0 [1 - a_2 w] \quad [\text{Eq. 2}]$$

$k_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement les modules d'incompressibilité et de cisaillement d'un matériau non endommagé.  $a_1$  et  $a_2$  sont deux paramètres qui caractérisent la détérioration progressive des propriétés élastiques par l'endommagement.  $w$  est la variable d'endommagement.  $e_v^e$  est la

déformation volumique élastique et  $H(e_v^e)$  est la fonction d'Heaviside de  $e_v^e$ . Cette fonction est introduite pour tenir en compte de l'effet unilatérale lié à la refermeture des microfissures.

Le potentiel thermodynamique est la somme de l'énergie des déformations élastiques et l'énergie bloquée pour l'écrouissage plastique:

$$Y(e^e, g_p, w) = \frac{1}{2} k \langle w \rangle (e_v^e)^2 + 2m \langle w \rangle e^e : e^e + Y_p(g_p) \quad [\text{Eq. 3}]$$

$e^e$  représente le tenseur des déformations déviatoriques,  $g_p$  est la déformation plastique déviatorique généralisée et  $Y_p(g_p)$  est l'énergie bloquée pour l'écrouissage plastique. Dans ce modèle, on suppose qu'il n'y a pas de couplage entre l'évolution d'endommagement et le processus d'écrouissage plastique. Alors, l'énergie bloquée pour l'écrouissage plastique  $Y_p(g_p)$  ne dépend pas de la variable d'endommagement. L'équation d'état peut être déterminée par la dérivation standard du potentiel thermodynamique:

$$\underline{s} = \frac{\partial Y}{\partial e^e} = k \langle w \rangle \text{tr}(e^e) \underline{1} + 2\mu \langle w \rangle e^e \quad [\text{Eq. 4}]$$

## 2.2. CARACTERISATION PLASTIQUE

Pour la détermination de la déformation plastique, il est nécessaire de définir une fonction de charge plastique, un potentiel plastique et une loi d'écoulement plastique. Les données expérimentales réalisées sur le béton ont montrées que la surface de chargement plastique et la surface de la rupture dépendent fortement de la pression de confinement. Il est donc nécessaire d'utiliser une surface de charge non linéaire. En se basant sur le modèle élastoplastique proposé par Pietruszczak et al. (Pietruszczak et al. 1988), le critère de rupture utilisé est comme suit:

$$F = c_{10} \frac{\partial q}{\partial g(q) f_c} \frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{s}} + c_{20} \frac{\partial q}{\partial g(q) f_c} \frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{s}} - c_{30} + \frac{I}{f_c} \frac{\partial \underline{s}}{\partial \underline{s}} = 0 \quad [\text{Eq. 5}]$$

Ce critère de rupture dépend des trois invariants des contraintes: la contrainte moyenne  $I$ , le déviateur de contrainte  $q$  et l'angle de Lode  $q$ , définis par:

$$q = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad \underline{S} = \underline{s} - \frac{S_{kk}}{3} \underline{1} \quad [\text{Eq. 6a}]$$

$$I = -\text{tr}(\underline{s}), \quad q = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right), \quad J_3 = \det(\underline{S}) \quad [\text{Eq. 6b}]$$

$\underline{S}$  est le tenseur des contraintes déviatoriques,  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  et  $c_{30}$  sont trois paramètres qui définissent la forme géométrique de la surface de rupture et sont liés à la cohésion du matériau et le coefficient de frottement interne.  $f_c$  est un paramètre qui représente la résistance à la compression simple du matériau.  $q$  est l'angle de Lode défini dans l'intervalle  $q \in \left[ -\frac{p}{6}, \frac{p}{6} \right]$ . La fonction  $g(q)$  est introduite pour prendre en compte la variation de la contrainte de rupture avec l'orientation de chargement dans le plan déviatorique. Cette fonction satisfait la condition  $g\left(\frac{p}{6}\right) = 1$  et  $g\left(-\frac{p}{6}\right) = K$ . Le paramètre  $K$  définit le rapport des résistance en compression et en traction du

matériau. La fonction de Lode proposée par William et Warnke (William et Warnke, 1975) est utilisée dans notre modèle:

$$g(q) = \frac{2(1 - K^2)\cos\left(q + \frac{p}{6}\right) + (2K - 1)\sqrt{4(1 - K^2)\cos^2\left(q + \frac{p}{6}\right) + 5K^2 - 4K}}{4(1 - K^2)\cos^2\left(q + \frac{p}{6}\right) + (2K - 1)^2} \quad [\text{Eq. 7}]$$

L'avantage de cette fonction est que la surface de rupture est convexe pour  $0.5 \leq K \leq 1$ .

La création des microfissures modifie la microstructure du matériau et induit une redistribution des contraintes dans un volume du matériau effective. Les propriétés élastiques et plastiques et le comportement à la rupture sont donc affectés par l'endommagement du matériau. On suppose que la résistance en compression simple du matériau diminue avec l'endommagement induit. Pourtant, pour des raisons de simplicité, une relation linéaire est proposée:

$$f_c = f_{c0} (1 - w) \quad [\text{Eq. 8}]$$

Le paramètre  $f_{c0}$  désigne la résistance en compression simple d'un matériau non endommagé. En remplaçant  $f_c$  dans [Eq. 5], le critère de rupture pour le matériau endommagé peut être exprimé comme suit:

$$F = c_1 \frac{\partial}{\partial g(q)} \frac{q}{f_{c0}} + c_2 \frac{\partial}{\partial g(q)} \frac{q}{f_{c0}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - c_3 + \frac{I}{f_{c0}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0 \quad [\text{Eq. 9}]$$

avec les paramètres de rupture qui dépendent de l'endommagement:

$$c_1 = c_{10}, c_2 = \frac{c_{20}}{(1 - w)}, c_3 = c_{30} (1 - w) \quad [\text{Eq. 10}]$$

En supposant que la surface de rupture représente la position asymptotique de la surface de charge plastique et en introduisant une loi d'écrouissage plastique, la surface de charge plastique peut être exprimé par la forme fonctionnelle suivante:

$$f_p = q - a_p(g_p)g(q)q_c = 0, q_c = \frac{-c_1 + \sqrt{(c_1^2 + 4c_2(c_3 + I/f_{c0}))}}{2c_2} f_{c0} \quad [\text{Eq. 11}]$$

$a_p(g_p)$  représente la loi d'écrouissage plastique. Elle est déduite du potentiel plastique bloqué  $Y_p(g_p)$ , celle-ci étant fonction de la variable d'écrouissage plastique  $g_p$ . En se basant sur les données expérimentales réalisées sur le béton, l'expression suivante est proposée pour le potentiel plastique bloqué:

$$Y^p(g_p) = g_p - A_0 \ln \frac{A_0 + g_p}{A_0} \quad [\text{Eq. 12}]$$

Le paramètre  $A_0$  contrôle la cinétique de l'écrouissage plastique.  $a_p(g_p)$  est déterminé par la dérivation du potentiel plastique bloqué par rapport à  $g_p$ :

$$a_p(g_p) = \frac{g_p}{A_0 + g_p}, dg_p = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon^p : d\epsilon^p}{c_p}, d\epsilon^p = d\epsilon^p - \frac{1}{3} \text{tr}(d\epsilon^p) \underline{\underline{1}} \quad [\text{Eq. 13}]$$

$d\bar{e}^p$  est le tenseur des déformations plastiques déviatoriques. La fonction  $c_p$  est introduite pour le cas où l'écroutissage plastique dépend fortement de la pression de confinement. Elle est définie par :

$$c_p = \frac{\alpha \langle I \rangle + f_{co}}{f_{co}} \frac{\bar{\sigma}^{a_1}}{\bar{\sigma}} \quad [\text{Eq. 14}]$$

Le paramètre  $a_1$  détermine l'influence de la pression de confinement sur la loi d'écroutissage plastique.

Les données expérimentales ont montré un passage de la compressibilité à la dilatance plastique. Pour bien décrire cette transition, il est nécessaire d'utiliser une loi d'écoulement plastique non associée. En se basant sur le modèle élastoplastique développé par Pietruszczak et al. (Pietruszczak et al. 1988), le potentiel plastique utilisé est le suivant:

$$Q = q + m_t g(q) \bar{I} \ln \frac{\alpha \bar{I} \bar{\sigma}}{I_0 \bar{\sigma}} = 0, \quad \bar{I} = c_3 f_{co} + I \quad [\text{Eq. 15}]$$

$\bar{I}_0$  est un coefficient qui désigne le point d'intersection entre la surface de potentiel plastique et l'axe  $\bar{I} > 0$ . Le paramètre  $m_t$  représente le ratio  $\frac{q}{g(q)\bar{I}}$  au point pour lequel  $d\bar{e}_{kk}^p = 0$ , c'est-à-dire, le point de transition de la compressibilité à la dilatance plastique.

### 2.3. CARACTERISATION D'ENDOMMAGEMENT

L'évolution d'endommagement est déterminée à partir d'un critère d'endommagement, qui est une fonction à valeur scalaire de la force associée à la variable d'endommagement. Une force motrice  $x_w$  est supposée d'être responsable de l'évolution d'endommagement. En se basant sur le critère d'endommagement isotrope proposé par Mazars (Mazars, 1984) pour le béton, une fonction exponentielle est choisie:

$$f_w(x_w, w) = w_c - w_c \exp[-B_w(x_w - x_0)] - w \leq 0 \quad [\text{Eq. 16}]$$

Où  $w_c$  est la valeur d'endommagement critique et correspond à la résistance mécanique résiduelle du matériau endommagé,  $x_0$  est le seuil d'endommagement et  $B_w$  est un paramètre qui contrôle la cinétique de l'évolution d'endommagement. La force motrice d'endommagement  $x_w$  dépend à la fois de la déformation volumique dilatante et des déformations de cisaillement:

$$x_w = \frac{1}{2} \alpha_1 k_0 \langle e_v \rangle^2 + 2a_2 m_0 \bar{e} : \bar{e} / c_w, \quad c_w = \frac{\alpha \langle I \rangle + f_{co}}{f_{co}} \frac{\bar{\sigma}^{a_2}}{\bar{\sigma}} \quad [\text{Eq. 17}]$$

$c_w$  est introduite pour prendre en compte l'effet de la pression de confinement sur l'évolution de l'endommagement et la transition du comportement fragile au ductile.  $a_2$  est un paramètre du modèle.

## 3. SIMULATIONS NUMERIQUES

Pour valider le modèle proposé, des simulations des essais de compression triaxiale ont été effectuées. La figure 1 montre les surfaces de rupture dans le plan  $(I, q)$ , respectivement pour les essais triaxiaux en compression et en extension. La figure 2 présente la comparaison entre les données expérimentales et les simulations numériques. Cette comparaison montre une bonne concordance générale.

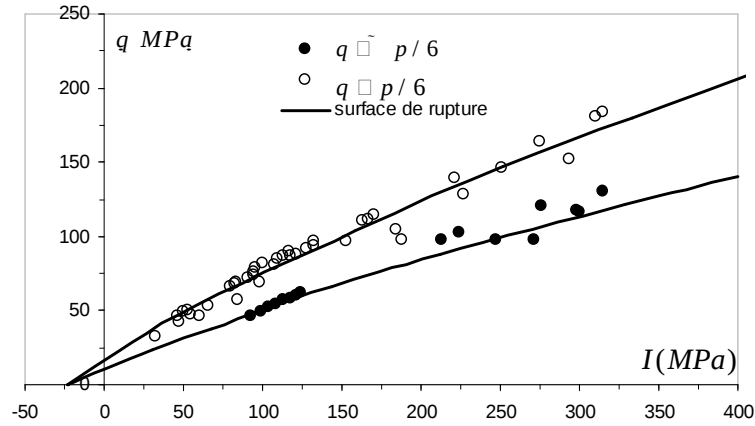


Figure 1: Surfaces de rupture en compression et en extension (données tirées de Milles et Zimmerman, 1970 ; Smith, 1985; Imran, 1994; Scholtz et al., 1995; Sfer et al., 2002).

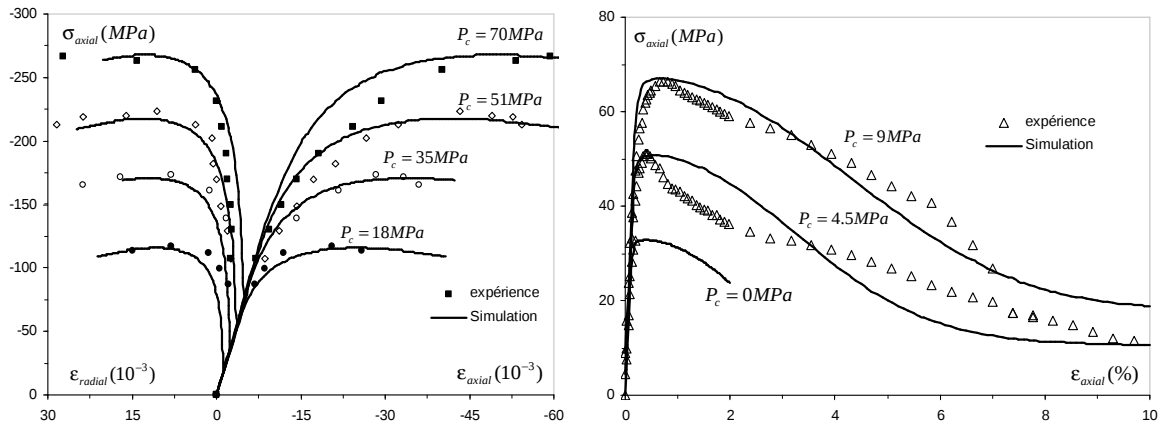


Figure 2: Simulations des essais triaxiaux en compression: (gauche)- données expérimentales de Kotsovos et Newman, 1980; (droite)- données expérimentales de Sfer et al., 2002.

#### 4. EXTENSION NON LOCALE DU MODELE

Le modèle proposé peut prédire un comportement radoucissant, qui est lié à la croissance de l'endommagement par microfissurations. Ce type de comportement engendre une localisation de déformation quand on s'approche du pic de contraintes. Le problème aux limites devient alors mal posé et dont la solution dépend du maillage choisi en éléments finis. L'approche non locale permet de régulariser le problème de localisation et introduit un limiteur de localisation. Pour notre modèle, l'approche non locale est appliquée sur l'évolution de l'endommagement. Ainsi, la valeur local de la force motrice de l'endommagement,  $x_w(\vec{x})$  est remplacée par une valeur non locale,  $\overline{x_w}(\vec{x})$ , obtenue par une procédure de moyenne pondérée. Dans notre étude, une distribution de type Gauss est utilisée pour calculer la valeur non locale de la force d'endommagement:

$$\overline{x_w}(\vec{x}) = \frac{1}{Y(\vec{x})} \int_W y(\vec{y}, \vec{x}) x_w(\vec{y}) dW, \quad Y(\vec{x}) = \int_W y(\vec{y}, \vec{x}) dW \quad [\text{Eq. 18}]$$

$y(\vec{y}, \vec{x})$  est la fonction de distribution de Gauss. Son expression est donnée par:

$$y(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \left( \frac{1}{l\sqrt{2p}} \right)^{N_{\text{dim}}} \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{2l^2} \right\} \quad [\text{Eq. 19}]$$

Où  $N_{\text{dim}}$  est le nombre de la dimension spatiale et  $l$  est la longueur caractéristique, qui dépend de l'hétérogénéité du matériau étudié.

## 5. APPLICATION NUMERIQUE

Dans cette section, on présente une application du modèle proposé en formulation non locale. Une structure en béton a été étudiée pour montrer la capacité du modèle pour des problèmes d'ingénierie. La géométrie de la structure et les dimension sont illustrées dans la figure 3. Le côté AC est encastré et un déplacement verticale est appliqué au point D. L'étude a été effectuée pour trois maillages de 350, 750 et 1400 éléments.

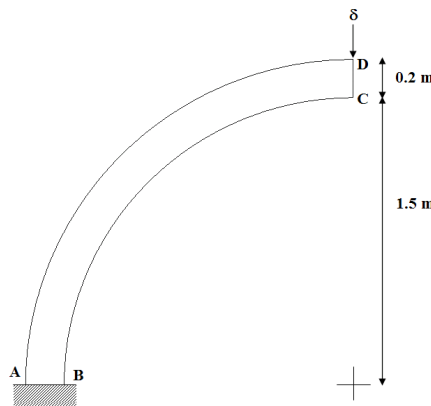


Figure 3: Géométrie et conditions aux limites.

La distribution de l'endommagement, obtenue par le modèle non local, est présentée dans la figure 4. On peut constater que les résultats donnés par le modèle non local sont quasiment indépendants du maillage.

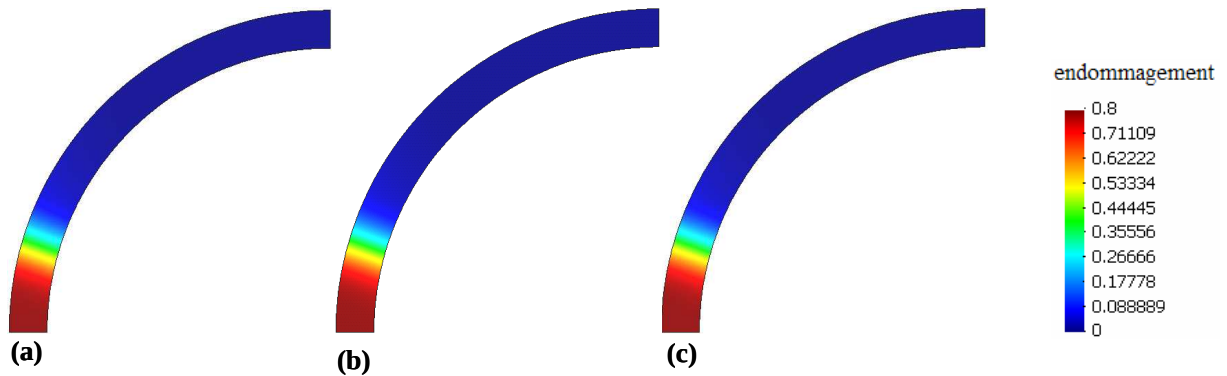


Figure 4: Distribution de l'endommagement dans la structure: (a)-350 éléments; (b)-750 éléments et (c)-1400 éléments.

La courbe force-déplacement, au point D, est correctement décrite par le modèle non local. Les trois courbes sont identiques et présentent des différences négligeables. La réponse reste stable pour tous les étapes des chargements.

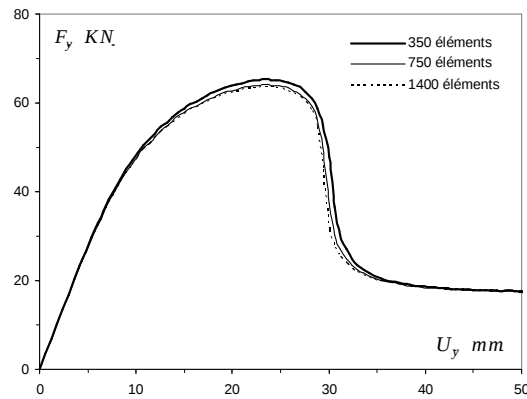


Figure 5: Courbes force-déplacement pour le modèle non local avec trois maillages différents.

## 6. CONCLUSION

Un modèle élastoplastique couplé à l'endommagement est proposé pour décrire le comportement mécanique de béton. L'endommagement par microfissuration induit un comportement radoucissant du matériau et la localisation de déformation. Afin de régulariser le problème mal posé dû à la localisation de déformation, l'approche non locale est introduite sur l'évolution de l'endommagement. L'application du modèle non local à un problème aux limites a montré que les solutions numériques restent indépendantes du maillage utilisé.

## 7. BIBLIOGRAPHIE

- Imran I. (1994) « Applications of non-associated plasticity in modeling the mechanical response of concrete », Thèse de doctorat, Université de Toronto, Canada.
- Kotsovos O., Newman J. B. (1980) « Mathematical description of deformational behavior of concrete under generalized stress beyond ultimate strength » *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 77, n° 5, p. 340-346.
- Mazars J. (1984) « Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure », Thèse de doctorat, Université Paris 6.
- Mills L. L., Zimmerman R. M. (1970) « Compressive strength of plain concrete under multiaxial loading conditions » *ACI Journal*, vol. 67, n° 47, p. 802-807.
- Pietruszczak S., Jiang J. et Mirza F. A. (1988) « An elastoplastic constitutive model for concrete » *International Journal of Solids & Structures*, vol. 24, n° 7, p. 705-722.
- Pijaudier-Cabot G., Bazant Z. P. (1987) « Nonlocal Damage Theory » *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 113, n° 10, p. 1512-1533.
- Scholtz U., Nechvatal D., Aschl H., Linse D., Stockl S., Grasser E., Kupfer H. (1995) « Versuche zum Verhalten von Beton unter dreiachsiger Kurzzeitbeanspruchung » *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 447, Berlin, 64 pages.
- Sfer D., Carol I., Gettu R., Etse G. (2002) « Study of the Behavior of Concrete under Triaxial Compression » *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128, n° 2, p. 156-163.
- Smith S. H. (1985) « On fundamental aspects of concrete behavior », M. Sc. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Colorado, USA.
- William K. J., Warnke E. D. (1975) « Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete » *Proc. Int. Ass. For Bridge and Struct. Engng.* 19, ISMES, Bergamo, p. 174-186.