
Modélisation numérique de l'ouverture des fissures dans les structures en béton

Mohammed Matallah* — Christian LaBorderie*

* LaSaGeC², Laboratoire de Sciences Appliquées au Génie Civil et Côtier
Université de Pau et des Pays de l'Adour
1, Allée du Parc Montaury, 64600 Anglet
mohammed.matallah@univ-pau.fr

RÉSUMÉ. La modélisation de la fissuration constitue un enjeu crucial pour l'analyse et la prédiction des structures en béton armé. Les approches maintenant classiques basées sur l'endommagement ou la plasticité ont pour objectif de décrire l'effet mécanique de la fissuration. Ces approches ne permettent généralement pas de déterminer les ouvertures de fissures qui jouent un rôle majeur dans beaucoup de problèmes couplés. Le modèle développé par Matallah [MAT 06] propose une approche originale qui utilise l'ouverture de fissures comme variable interne. Couplant l'endommagement et l'anélasticité, ce modèle propose de formuler le concept d'ouverture de fissures avec une approche similaire à celle de la plasticité. Une variable appelée ε^{ouf} de caractère anisotrope est introduite afin de décrire le caractère anélastique du matériau. Cette nouvelle variable permet d'introduire naturellement les effets unilatéraux (ouverture-fermeture de fissures). Cet article fait le point sur la capacité du modèle développé à décrire l'ouverture et la refermeture des fissures. Après un rappel des bases mathématiques du modèle, des simulations numériques d'une structure en béton armé sous chargement cyclique sont présentées. Les résultats des simulations sont comparés à l'expérimentation. Les cartes de fissuration de la poutre sont aussi présentées.

ABSTRACT. Numerical modeling of cracking is of a great importance when considering safety and durability of concrete structures. A number of approaches have been developed to achieve this goal. The model developed by Matallah [MAT 06] propose an original approach to allow crack opening computation. The model couples inelasticity and damage. Inelasticity is described by a tensorial variable ε^{ouf} which characterize the crack opening effect. The crack opening concept is formulated in the same manner as the plasticity approach. The unilateral effect (Crack closure effect) is naturally introduced thanks to the variable ε^{ouf} . In this paper, we discuss the capacity of the model to describe cracking in concrete structures. We will start this paper by formulating the model. Furthermore, numerical model responses of beam subjected to cyclic loading are presented and compared to experimental results. Crack patterns at different loading level are presented.

MOTS-CLÉS : Ouverture de fissures, endommagement, anélasticité.

KEYWORDS: Cracks opening, damage, inelasticity.

1. Introduction

L'analyse et la prévision de la ruine des structures en béton armé constituent un enjeu important dans le domaine du génie civil. Des efforts remarquables ont été investis pour la compréhension physique des processus de dégradation affectant ces ouvrages ainsi que la capacité à décrire ces processus avec des modèles numériques. Les ouvrages et les structures sont généralement le siège de sollicitations variées (mécaniques, hydrauliques, thermiques...) et pour nombre d'entre eux (barrages, enceintes de confinement...), la durabilité est essentiellement liée à leur étanchéité. Dans ce contexte, deux paramètres jouent un rôle fondamental parce qu'ils contrôlent la cinétique du transfert à travers le matériau : l'ouverture de fissures et la perméabilité. L'évaluation de la perméabilité passe aussi par la connaissance de l'état mécanique, elle est en effet directement liée à l'état d'endommagement du matériau [JAS 06] et dans les zones à fort endommagement, à l'ouverture de fissures.

Le processus de dégradation mécanique de ces ouvrages est associé à un développement de micro et macro fissurations pouvant augmenter considérablement leur perméabilité et constituent de ce fait, un risque majeur pour l'étanchéité et la sûreté de ces ouvrages. Dans les zones à fortes fissuration, le niveau d'étanchéité dépend fortement de l'ouverture de fissures. De ce fait, il est très important d'avoir une définition claire de l'ouverture d'une fissure et d'être capable de la mesurer avec précision si l'on veut établir des lois d'évolution pour le phénomène de transfert au travers un élément fissuré.

Les fissures dans le matériau béton représentent des discontinuités géométriques. De point de vue cinématique, la modélisation de ces discontinuités peut être accomplie via deux approches principales :

– Les approches discrètes :

Dans ce type d'approches, les fissures sont représentées par des discontinuités de déplacements (discontinuités fortes) ou de déformations (discontinuités faibles). L'inconvénient majeur de ces approches est que l'on peut pas décrire la phase initiale de dégradation du matériau caractérisée par un endommagement diffus.

– Les approches continues :

Ce sont les approches couramment utilisées dans les modélisations par éléments finis. Les champs de déplacements sont continus. Le processus de fissuration est caractérisé par une transition d'un état initial de déformation à faible gradient à un état à fort gradient. Ce type d'approche n'est pas approprié pour décrire l'état final de dégradation caractérisé par l'amorçage d'une fissure complète séparant le matériaux en blocs séparés.

La classification qu'on a établie est de caractère cinématique. Chaque description cinématique doit être associée à des lois des comportement aboutissant à des modèles spécifiques aux matériaux traités. Chacune des deux approches présente des inconvénients et des avantages. Pour pouvoir prédire correctement l'ouverture de fissures,

les approches discrètes semblent bien adaptées sauf que l'état initial de dégradation caractérisé par un endommagement diffus n'est pas bien décrit.

Le modèle développé par Matallah [MAT 06] propose une formulation proche des modèles de la fissuration diffuse [RAS 68, BOR 85, BAZ 83]. Un nouveau concept est introduit "la notion d'ouverture de fissures". En effet, les microfissures dans le béton sont modélisées par un tenseur d'ouverture de fissures ε_{ouf} . Les microfissures sont supposées être distribuées autour des points d'intégration. Si h est la taille de l'élément fini considéré et si $[u]$ est le saut de déplacement au point de l'amorçage des microfissures, la déformation anélastique correspondante à ce saut de déplacement est notée $\varepsilon_{ouf} = \frac{[u]}{h}$. La variable tensorielle ε_{ouf} est couplée à une variable scalaire d'endommagement D . La formulation de la loi de comportement est donnée par :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad [1]$$

même si l'endommagement est décrit par un scalaire caractérisant habituellement une isotropie, son effet mécanique est modulé par le caractère anisotrope de la variable ε_{ouf} [MAT 06]. Les états initiaux de dégradation peuvent être caractérisés par la variable d'endommagement D . Dans les zone à forte fissuration, la variable ε_{ouf} constitue une variable clé pour la détermination de l'ouverture de fissure qui représente un élément fondamental pour étudier les problèmes d'étanchéité d'ouvrage.

Le tenseur d'ouverture de fissures ε_{ouf} est lié aux déformations anélastiques par une variable S , appelée Indicateur d'Ouverture de Fissure. Quand les fissures sont complètement ouvertes $S = 1$:

$$\varepsilon_{kl}^{ouf} = S\varepsilon_{kl}^{an} = \varepsilon_{kl}^{an} \quad [2]$$

Quand les fissures se referment (cas d'un chargement cyclique), on a $S = 0$, et :

$$\forall \varepsilon_{kl}^{an}, \varepsilon_{kl}^{ouf} = S\varepsilon_{kl}^{an} = 0 \quad [3]$$

Les fissures sont fermées mais le matériau garde en "mémoire" l'état de dégradation antérieur qu'il a subi. Le matériau restaure sa raideur quelque soit l'état d'endommagement :

$$\forall \varepsilon_{kl}^{an}, \forall D, \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - DS\varepsilon_{kl}^{an}) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad [4]$$

2. Formulation thermodynamique du modèle proposé :

2.1. Potentiel d'état :

Le modèle est développé dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. On postule l'existence d'un potentiel thermodynamique fonction des variables d'état et duquel dérivent les lois d'évolution des variables internes.

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, S, \varepsilon^{an}, \varepsilon^{ouf}, D, p) \quad [5]$$

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij} - D\varepsilon_{ij}^{ouf})C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - D\varepsilon_{kl}^{ouf}) + f(p) \quad [6]$$

$$\varepsilon_{ij}^{ouf} = S\varepsilon_{ij}^{an} \quad [7]$$

La loi contrainte-déformation équation (1) s'obtient en appliquant le deuxième principe de la thermodynamique.

2.2. Potentiel de dissipation :

Les lois d'évolution de la variable tensorielle ε_{ij}^{ouf} représentant les ouvertures de fissures sont gérées comme dans le cas de la plasticité avec une fonction de charge. Nous proposons un critère de charge multisurfaces formé de deux critères de type Drucker Prager, l'un pour modéliser la traction et l'autre pour la compression.

$$\begin{cases} F_t = \alpha_t J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_t I_1(\tilde{\sigma}) - R_t - f_t^0 \\ F_c = \alpha_c J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_c I_1(\tilde{\sigma}) - R_c - f_c^0 \end{cases} \quad [8]$$

Nous avons choisi d'écrire les lois d'évolution des variables internes dans un cadre non associé. En effet, la règle de normalité est écrite par rapport au potentiel anélastique. Les expressions des potentiel anélastiques sont données par :

$$\begin{cases} g_t = \alpha_{tg} J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_{tg} I_1(\tilde{\sigma}) - R_t \\ g_c = \alpha_{cg} J_2(\tilde{\sigma}) + \beta_{cg} I_1(\tilde{\sigma}) - R_c \end{cases} \quad [9]$$

L'écoulement anélastique se fait à contraintes effectives. Dans le cas de notre formulation, la contrainte effective représente la contrainte calculée à partir de l'état de déformation élastique existant et de la relation d'élasticité du matériau vierge. Nous notons :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ouf}) \quad [10]$$

2.3. Lois d'évolution des fonctions d'écrouissage :

Les fonctions d'écrouissage R_t et R_c sont introduites pour décrire la dégradation du matériau après la phase élastique. En traction, nous proposons pour décrire R_t une loi linéaire :

$$R_t = a_t p_t \quad [11]$$

le paramètre a_t est fonction de la limite élastique en traction f_t et de la déformation à la rupture en traction ε_r , p_t est la déformation anélastique cumulée en traction.

En compression, après la phase élastique, le matériau présente un durcissement suivi d'un adoucissement. Nous proposons une loi exponentielle pour décrire la variable R_c :

$$R_c = (a_c p_c + f_c^0) * \exp(-b_c p_c) - f_c^0 \quad [12]$$

2.4. Loi d'évolution de l'endommagement :

L'endommagement est caractérisé par une variable scalaire D , sa loi d'évolution dérive d'une fonction de charge par la loi de normalité.

$$F(D) = g(p, Y) - Y_0 = -Y \xi \exp(-\xi p) - Y_0 \quad [13]$$

p est la déformation anélastique cumulée.

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y} = \dot{\lambda} \xi \exp(-\xi p) \quad [14]$$

2.5. Loi d'évolution de la variable S (Indicateur d'Ouverture de Fissures) :

La variable S est bornée entre deux valeurs 0 et 1. Nous prenons comme loi d'évolution une loi linéaire :

$$S = 1 - \frac{F_t^{ac}}{F_t^{\sigma_f}} \quad [15]$$

F_t^{ac} : Valeur de la fonction de charge.

$F_t^{\sigma_f}$: Valeur de la fonction de charge au point de la restauration de la raideur.

La loi est adaptée pour un cas de chargement cyclique uniaxial, mais reste une approximation pour d'autres cas de chargement.

3. Application aux calculs de structures :

3.1. Concept énergétique :

Pour limiter les phénomènes de localisation, nous utilisons l'approche dite Crack Band Theory [BAZ 83] où l'on considère que les champs des déformations et des contraintes sont continus. La zone de localisation est représentée par une bande de largeur l_c . L'énergie de fissuration G_f est calculée en fonction de la contrainte nominale σ . G_f est l'aire sous la courbe $(\sigma - \varepsilon^{ouf})$.

$$\frac{G_f}{l_c} = \frac{1}{2} \varepsilon_r f_t + \frac{E}{\xi^2} \quad [16]$$

Le paramètre ε_r qui nous permet de calculer la branche descendante de la courbe est fonction de la taille des éléments du maillage. L'énergie de fissuration dans une bande est indépendante de la taille des mailles.

Le modèle proposé a été implanté dans le code aux éléments finis Cast3M en 2D et en 3D. Nous proposons d'illustrer les capacités du modèle par un calcul cyclique sur une poutre en béton armé en faisant l'hypothèse des contraintes planes.

3.2. Poutre en flexion cyclique [LAB 91] :

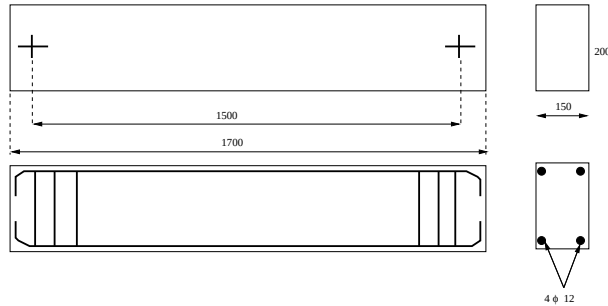


Figure 1. Géométrie de la poutre

La géométrie de la poutre ainsi que son ferrailage sont représentées sur la figure 1.

Le chargement est composé d'un cycle d'amplitude $1mm$ suivi d'un cycle d'amplitude $2mm$ (figure 2).

Les paramètres du modèle identifiés pour ce problème sont : $G_f=100N/m$, $\xi=2000$, $\sigma_f=3Mpa$, $f_t=2Mpa$. Pour chaque élément du maillage, la valeur de ε_r est déterminée à partir de l'équation 16. La réponse globale est représentée sur la figure 3 en comparaison avec le résultat de l'essai. On remarque une très bonne cohérence entre les deux résultats.

Pour illustrer le rôle de la variable ε_{ouf} , nous allons tracer les cartes de fissuration (déformations anélastiques ε_{an11} et de ε_{ouf11} correspondantes aux valeurs normales

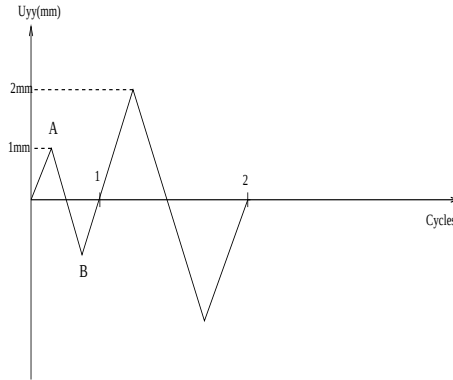


Figure 2. Histotire de chargement

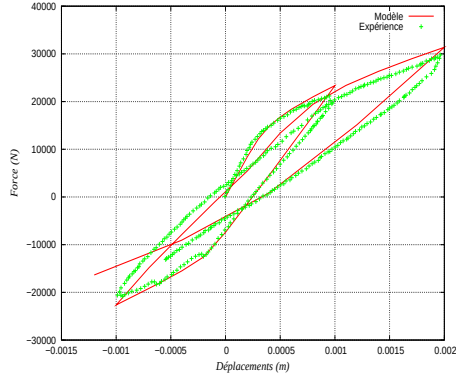


Figure 3. Comparaison Essai-Calcul

pour l'axe parallèle à celui de la poutre) pour les états correspondant aux points *A* et *B* (figure 2). Au point *A*, la partie supérieure de la poutre est endommagée, les cartes de ε_{an} et de ε_{ouf} sont identiques (figure 4). Le point *B* correspond à un chargement opposé, les fissures initialement ouvertes se referment alors que de nouvelles fissures se créent (figure 5). Les déformations anélastiques sont toujours présentes dans la partie supérieure alors que les fissures sont bien fermées comme le montre la carte de ε_{ouf11} . En d'autres termes, quand on décharge le matériau, on referme les fissures mais l'état d'endommagement est toujours conservé en "mémoire".

Le modèle développé a l'avantage de pouvoir décrire le processus d'ouverture et de refermeture de fissures. Lors d'un chargement cyclique, la relation introduite entre le tenseur de déformations anélastiques ε_{an} et le tenseur ε_{ouf} nous a permis de distinguer les effets de dégradation du phénomène de refermeture de fissures.

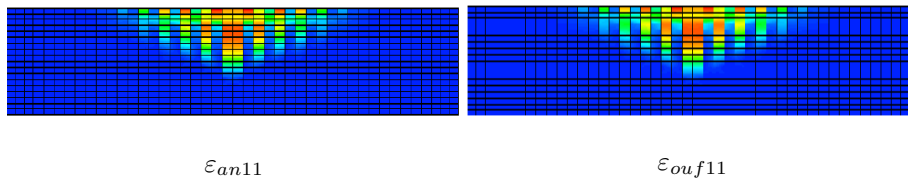


Figure 4. Etat de chargement (*A*)

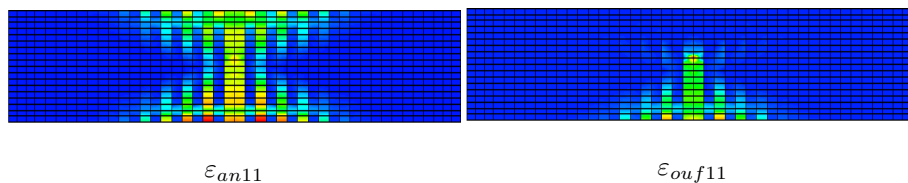


Figure 5. Etat de chargement (*B*)

4. Conclusion :

Le modèle proposé repose sur une approche originale qui est basée sur un concept d'ouverture de fissures. Les lois d'évolution de la fissuration sont formulées par une approche similaire à celle de la plasticité. La variable tensorielle introduite ε^{ouf} représente un moyen pour calculer les ouvertures de fissures dans le matériau, elle permet également d'introduire le caractère unilatéral du matériau et l'anisotropie induite de façon très simple.

Le modèle a été testé sur une poutre en flexion cyclique. Nous avons remarqué une très bonne cohérence entre les résultats de simulation et l'expérimentation. De point de vue expérimental, il a été constaté que si le matériau est déchargé après avoir subi un état d'endommagement, il restaure sa raideur, les fissures précédemment ouvertes se referment mais la structure interne du matériau reste toujours endommagée. Le modèle développé reproduit bien cet effet.

La description de l'ouverture et de la refermeture de fissures dans les ouvrages et les structures au cours d'un chargement constitue un point important pour l'étude des problèmes couplés. L'approche développée devra être confrontée quantitativement à l'expérience, la détermination des ouvertures de fissures ainsi que le couplage avec d'autres mécanismes (perméabilité,...) seront traités dans de futurs travaux.

5. Bibliographie

- [BAZ 83] BAZANT Z., OH B., « Crack band theory for fracture of concrete », *RILEM Mat Struct*, n° 16, 1983, p. 155-177.
- [BOR 85] DE BORST R., NAUTA P., « Non-orthogonal cracks in smeared finite element model », *Engng Comput*, vol. 2, 1985, p. 35-46.
- [JAS 06] JASON L., HUERTA A., PIJAUDIER-CABOT G., GHAVAMIAN S., « An elastic plastic damage formulation for concrete : Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model », *Comput. Methods Appl. Meth. Engng.*, vol. 195, 2006, p. 7077-7092.
- [LAB 91] LA BORDERIE C., « Phénomènes Unilatéraux dans un Matériau Endommageable : Modélisation et Application à l'Analyse de Structures en Béton. », Thèse de Doctorat, Université Paris 6, École Normale Supérieure de Cachan, mai 1991.
- [MAT 06] MATALLAH M., LA BORDERIE C., « Modélisation numérique de l'endommagement anisotrope et unilatéral dans les structures en béton », *Rencontres Universitaires de Génie Civil*, La Grande Motte, June 1-2, LMGC., 2006.
- [RAS 68] RASHID Y., « Analysis of prestressed concrete pressure vessels », *Nucl Engng Des*, vol. 7, 1968, p. 334-344.