
Propagation de fissure en mode mixte dans un matériau viscoélastique orthotrope :

Approche numérique et analytique par l'intégrale $M\theta v$

Rostand MOUTOU PITTI — Frédéric DUBOIS — Nicolas SAUVAT — Christophe PETIT

*Laboratoire Mécanique et Modélisation des Matériaux et Structures du Génie Civil, Université de Limoges, IUT d'Egletons
Boulevard Jacques Derche
19300 Egletons
rostand.moutou-pitti@etu.unilim.fr*

RÉSUMÉ. Ce travail présente une nouvelle méthode numérique et analytique appelée $M\theta v$ permettant le découplage complet des modes de rupture dans un matériau viscoélastique orthotrope soumis à un chargement complexe. Le développement de l'intégrale, issu des théorèmes de conservation énergétiques et de l'association des champs réels et virtuels, est exposé. L'algorithme de propagation permettant le couplage de l'intégrale invariante et le comportement viscoélastique orthotrope, est développé. L'ensemble des procédures est résolu par le code aux éléments finis Castem à partir d'une formulation incrémentale. En terme de résultats, l'évolution du taux de restitution d'énergie en fonction de la longueur de fissure et du temps est exploitée en mode I et en mode mixte.

ABSTRACT. A new analytic method, $M\theta v$ namely, uncoupling mixed mode fracture during a creep crack growth process for viscoelastic orthotropic material, is presented. This integral is developed by the conservative law and the combination of virtual and real fields is exposed. The algorithm fracture allows the coupling of this non-variant integral and the viscoelastic orthotropic behaviour, is developed. All procedures are resolved by the finite element software Castem. As results, the evolution of energy release rate versus crack length and time is showed in pure mode I and mixed mode.

MOTS-CLÉS : rupture en modes mixtes, matériaux viscoélastiques orthotropes, éléments finis, fluage, intégrales indépendantes.

KEYWORDS: mixed mode fracture, viscoelastic orthotropic materials, creep, finite element, path independent integral.

1. Introduction

Comme la plupart des matériaux composites, le bois est caractérisé par un comportement viscoélastique orthotrope et par la présence des défauts naturels ou artificiels. Ces discontinuités matérielles, associées à des sollicitations en fatigue (Ma *et al.*, 2006) ou en fluage (Dubois *et al.*, 1999) peuvent engendrer des fissures de cinétiques mixtes. Afin de comprendre ce mode mixte de fissuration, plusieurs auteurs ont mené des investigations sur des matériaux élastiques (Chang *et al.*, 2007), et ductiles (Zhang *et al.*, 2006). Mais ces études concernent des sollicitations en fatigue, et ce, sans prendre en compte un éventuel comportement viscoélastique.

Cette étude s'intéresse au découplage de modes de rupture pour un matériau viscoélastique orthotrope. Les critères de fissuration utilisés sont définis par Griffith et issus d'une formulation thermodynamique via le calcul du taux de restitution d'énergie. En pointe de fissure, le matériau est supposé viscoélastique linéaire. La longueur de la zone d'élaboration est donnée par le model de Dugdale (Dugdale, 1960). Dubois (Dubois *et al.*, 2002) s'est par ailleurs appuyé sur ce model pour étudier la propagation de la fissure en mode d'ouverture dans le bois.

Dans une première partie, nous présentons le développement de l'intégrale $M\theta$ basé sur les théorèmes de conservation énergétique, et faisant appel à des champs mécaniques réels et virtuels. La seconde partie présente le couplage de cette intégrale avec le comportement viscoélastique. Grâce à une formulation incrémentale, l'algorithme de propagation obtenu est résolu par le code aux éléments finis Castem. Enfin, nous présentons l'évolution du taux de restitution d'énergie pour différentes cinétiques de propagation.

2. Développement de l'intégrale $M\theta$

Dans le cas des cinétiques en modes mixte, il convient d'opérer un découplage de modes de rupture pour évaluer la part du mode I et II. Pour des champs de déplacements réels δu et virtuels δv cinématiquement admissibles, la variation du Lagrangien est nulle (Noether, 1918) lors d'une variation du domaine V et du temps t . On écrit alors :

$$\delta L = \int_t \int_V \delta F dV dt = 0 \quad [1]$$

δF est une perturbation infinitésimale de la densité d'énergie libre due à une progression δa du front de fissure dans la direction x_1 . En introduisant la forme bilinéaire de la densité d'énergie libre (Chen *et al.*, 1977) $F(u, v) = F^*$, et une description Lagrangienne Eulérienne Arbitraire (Dubois *et al.*, 1999), le Lagrangien [1] devient :

$$\delta L = \int_V \int_t \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial x_1} \delta a + \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u_{i,\alpha}^* + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v_{i,\alpha}^* \right) dV dt \quad [2]$$

En prenant en compte le théorème de Gauss-Ostrogradski, les formes bilinéaires de l'énergie libre de déformation : $\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^v$; $\frac{\partial F}{\partial v_{i,j}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^u$, et les équations d'équilibre en l'absence des forces de volume : $\sigma_{ij,j}^u$; $\sigma_{ij,j}^v$, l'équation [2] prend la forme suivante (Moutou *et al.*, 2006) :

$$M = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij,1}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,j}) \cdot n_j d\Gamma_1 + \frac{1}{2} \int_{A(\Gamma_1)} ((\sigma_{ij}^v \cdot (u_{i,j})_{,1} + \sigma_{ij}^u \cdot (v_{i,j})_{,1}) - ((\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j})_{,1} + (\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,j})_{,1})) dS \quad [3]$$

$A(\Gamma_1)$ désigne l'aire comprise entre les contours Γ_1 et Γ_2 , Figure 1.

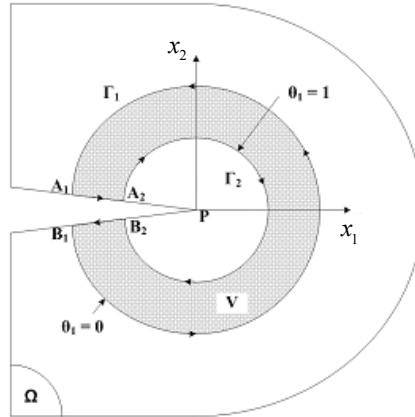


Figure 1. Contour d'intégration.

A la place de l'intégrale curviligne [3], on définit, pour des impératifs d'intégration numérique, un contour surfacique à l'aide d'un champ θ continûment dérivable, unitaire à l'intérieur du domaine et nul à l'extérieur, Figure 1. Ainsi grâce au théorème de Gauss-Ostrogradski, on obtient :

$$\begin{aligned}
M\theta &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij,k}^v \cdot u_i) \cdot \theta_{k,j} dS \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left((\sigma_{ij}^v \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^u \cdot (v_{i,j})_{,k}) - ((\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,j})_{,k}) \right) \cdot \theta_k dS
\end{aligned} \quad [4]$$

Le premier terme de l'équation [4] est associé à une fissure stationnaire (Destuynder *et al.*, 1983), alors que le second permet de prendre en compte une propagation de la fissure.

3. Comportement viscoélastique et algorithme de propagation

La généralisation au comportement viscoélastique se fait grâce au model de Kelvin Voigt généralisé, représentant l'association en série d'un ressort et de plusieurs modèles simples de Kelvin Voigt. L'équation [4] se transforme ainsi :

$$\begin{aligned}
M\theta_v^p(u, v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij}^p(u) \cdot v_{i,k}^p - \sigma_{ij,k}^p(v) \cdot u_i^p) \cdot \theta_{k,j} dS \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left((\sigma_{ij}^p(v) \cdot (u_{i,j}^p)_{,k} + \sigma_{ij}^p(u) \cdot (v_{i,j}^p)_{,k}) - ((\sigma_{ij}^p(v) \cdot u_{i,j}^p)_{,k} + (\sigma_{ij}^p(u) \cdot v_{i,j}^p)_{,k}) \right) \cdot \theta_k dS
\end{aligned} \quad \text{et } p = (0, \dots, M) \quad [5]$$

où $\sigma_{ij}^p(u)$ et $\sigma_{ij}^p(v)$ désignent respectivement les contraintes réelles et virtuelles du $p^{ième}$ ressort, u_i^p et v_i^p leurs déplacements associés (Sih, 1974). Grâce à l'équation [5], nous obtenons les découplages suivants :

$${}^u K_I^p = \frac{8 \cdot M\theta_v^p(u, v) ({}^v K_I^p = 1, {}^v K_{II}^p = 0)}{C_1^p} ; \quad {}^u K_{II}^p = \frac{8 \cdot M\theta_v^p(u, v) ({}^v K_I^p = 0, {}^v K_{II}^p = 1)}{C_2^p} \quad [6]$$

$$G_v^p = {}^1 G_v^p + {}^2 G_v^p = C_1^p \frac{({}^u K_I^p)^2}{8} + C_2^p \frac{({}^u K_{II}^p)^2}{8} \quad \text{avec} \quad {}^1 G_v = \sum_k {}^1 G_v^p, {}^2 G_v = \sum_k {}^2 G_v^p \quad [7]$$

où ${}^1 G_v$ et ${}^2 G_v$ sont les taux de restitution d'énergie, ${}^u K_I^p$ et ${}^u K_{II}^p$, les facteurs d'intensité de contraintes réels, C_I^p et C_{II}^p les complaisances viscoélastiques réduites orthotropes respectives. La formulation incrémentale, en déformation $\Delta \varepsilon_{ij}$ et en contrainte $\Delta \sigma_{kl}$, utilisée est la suivante (Ghazlan *et al.*, 1995) :

$$\Delta \varepsilon_{ij}(t_n) = M_{ijkl} \cdot \Delta \sigma_{kl}(t_n) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_{n-1}) \quad [8]$$

où M_{ijkl} est la matrice de complaisance viscoélastique, l'histoire du comportement héréditaire est stockée dans la variable interne $\hat{\varepsilon}_{ij}$. La résolution de l'équation [8] se fait par éléments finis grâce à la formulation en déplacement, issue du théorème des travaux virtuels, suivante :

$$K_T^P \cdot \{\Delta u^P\}(t_n) = \{\Delta F_{ext}^P\}(t_n) + \{\tilde{F}^P\}(t_{n-1}) \quad [9]$$

où $\{\Delta u^P\}(t_n)$ est l'incrément de déplacement, $\{\Delta F_{ext}^P\}(t_n)$ l'incrément de chargement nodal, $\{\tilde{F}^P\}(t_{n-1})$ l'histoire supplémentaire de chargement. K_T^P est la matrice tangente de rigidité globale. L'algorithme de propagation permet le couplage de toutes les procédures afin de les résoudre avec Castem. Pour cela, on suppose les différents champs mécaniques connus à l'instant t_{n-1} :

– Premièrement, nous considérons le temps invariant : on calcule les différents champs mécaniques pour la géométrie initiale de longueur de fissure a , la contrainte σ_1 en est calculée. On évalue σ_2 sur la seconde géométrie de longueur de fissure $a + \Delta a$, σ_1 est projetée sur cette nouvelle géométrie. On obtient alors σ_1^P et le champ de force viscoélastique $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1^P$.

– Le pas de propagation est fixé et on fait varier le temps : l'incrément de force calculé précédemment est utilisé comme chargement supplémentaire pendant l'incrément de temps Δt selon l'équation [9]. A chaque pas de propagation, on calcule le taux de restitution d'énergie. On a une évolution de la fissure simulant la décohésion progressive du front de fissure.

4. Résultats numériques

L'éprouvette CTS (Compact-Tension-Shear), illustrée à la Figure 2,

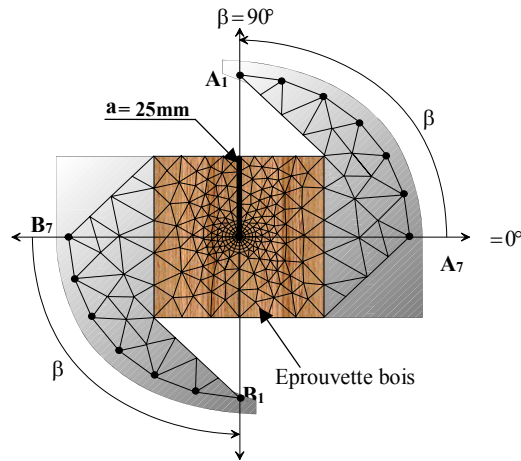


Figure 2. Epreuve CTS

utilisée par Ma *et al.* (2006) et Zhang *et al.* (2006) est retenue pour simuler les différents modes de rupture. La fissure initiale est $a = 25\text{mm}$, avec un pas de propagation $\Delta a = 1\text{mm}$. L'éprouvette de 80mm de côté, est munie des trous numérotés de A_1 à A_7 et B_1 à B_7 orientés suivant les angles (β) où s'applique un chargement unitaire de 1N . Le coefficient de Poisson est de $0,4$ et les caractéristiques mécaniques sont les suivantes : $E_X = 1500\text{MPa}$; $E_Y = 600\text{MPa}$; $G_{XY} = 700\text{MPa}$.

La Figure 3 présente l'évolution du taux de restitution d'énergie, élastique $G1$, viscoélastiques pour soixante minutes $Gv1$ (60 min) et dix jours $Gv1$ (14400 min), en mode I, et en fonction de la longueur de la fissure. Le temps affiché représente le temps nécessaire pour propager la fissure de 1mm . Le calcul élastique de référence $G1$ a été obtenu avec l'équation [4], tandis que les deux calculs viscoélastiques $Gv1$, sont donnés par l'expression [5]. On remarque que $Gv1$ pour un temps de 14400 minutes est supérieur à $Gv1$ pour 60 minutes et à $G1$ élastique (0 minutes). Ces différences traduisent le comportement différé du matériau, et par conséquent, son caractère viscoélastique. Les Figure 4 *a* et *b* représentent respectivement les mêmes évolutions de la part du mode I et du mode II (respectivement $G2$, $Gv2$ (60 min), $Gv2$ (14400 min)) en mode mixte, pour un angle de 45° . On note que, en plus des analyses faites pour la Figure 3, les modes I et II sont bien découplés dans le cas des cinétiques mixtes de fissuration.

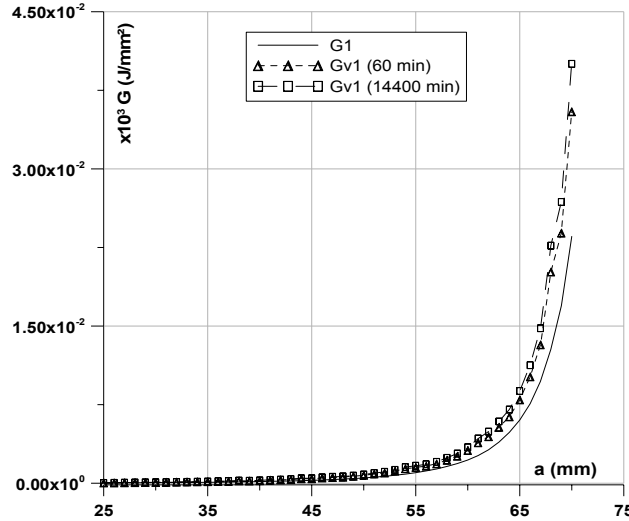


Figure 3. Taux de restitution d'énergie en mode I pure vs. longueur de la fissure.

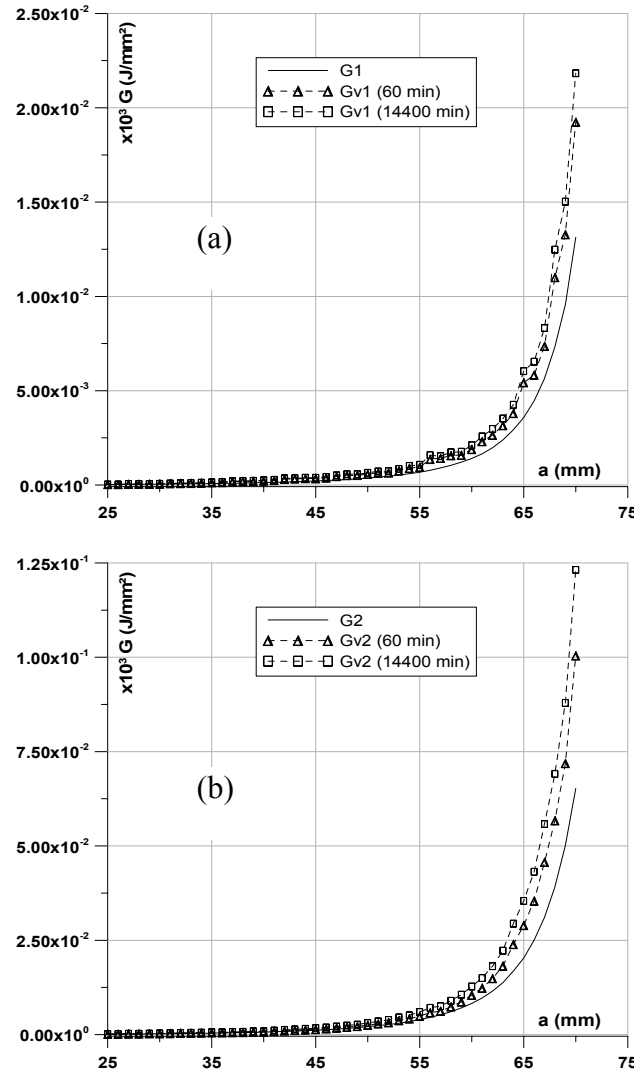


Figure 4. Taux de restitution d'énergie en mode mixte 45° vs. longueur de la fissure. a (part du mode I) ; b (part du mode II).

5. Conclusion

Nous avons développé une intégrale permettant le découplage des modes de rupture pour un matériau viscoélastique orthotrope sollicité en fluage. Par le couplage de cette intégrale avec une formulation viscoélastique incrémentale, nous

avons élaboré un algorithme. Ce dernier relie l'ensemble des procédures, et est résolu par le code aux éléments finis Castem. Les résultats numériques obtenus, en terme de taux de restitution d'énergie, montrent bien le comportement viscoélastique du matériau et aussi l'efficacité de notre modèle pour opérer un découplage de modes. Cependant, il reste à développer une stratégie expérimentale assurant la stabilité de la fissure en mode mixte, et qui permettra de valider notre modèle analytique et numérique.

12. Bibliographie

- Chang J.H., Wu D.J., « Computation of mixed-mode stress intensity factors for crack in anisotropic elastic solids », *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, doi:10.1016/j.engfracmech.07.011.
- Chen F.M.K., Shield R.T., « Conservation laws in elasticity of J-integral type ». *Journal of applied Mechanics and Physics*, vol. 28, 1977, p. 1-22.
- Destuynder P., Djaoua M., Lescure S., 1983 « Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 2, 1983, p. 113-115.
- Dugdale D.S., « Yielding of steel sheets containing slits », *J.Mech. Phys. Solids*, vol. 8, n° 6, 1960, p. 104-104.
- Dubois F., Chazal C., Petit C., « A finite element analysis of creep-crack growth in viscoelastic media », *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 2, 1999, p. 269-286.
- Ghazlan G., Caperaa S., Petit C., « An incremental formulation for the linear analysis of the viscoelastic structures using generalized variables », *International Journal of Numerical Methods Engineering*, vol. 38, 1995, p. 3315-3333.
- Ma S., Zhang X.B., Recho N., Li J., « The mixed-mode investigation of the fatigue crack in CTS metallic specimen », *International Journal of Fatigue*, vol. 28, 2006, p. 1780-1790.
- Moutou Pitti R., Dubois F., Petit, C., Sauvat N., « Long term fracture of wood under mixed mode loading : Numerical approach by the $M\theta V$ -integral », *9th World Conference on Timber Engineering*, Portland, OR, USA, August 6-10, 2006.
- Noether E., « Invariant variations problem », *Transport Theory and Statistical Physics*, vol. 1, 1918, p. 183-207
- Sih G.C., 1974 « Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems », *International Journal of Fracture*, vol. 10, 1974, p. 305-321.
- Zhang X.B., Ma S., Recho N., Li J., « Bifurcation and propagation of a mixed-mode crack in a ductile material », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 73, 2006, p. 1925-1939.